

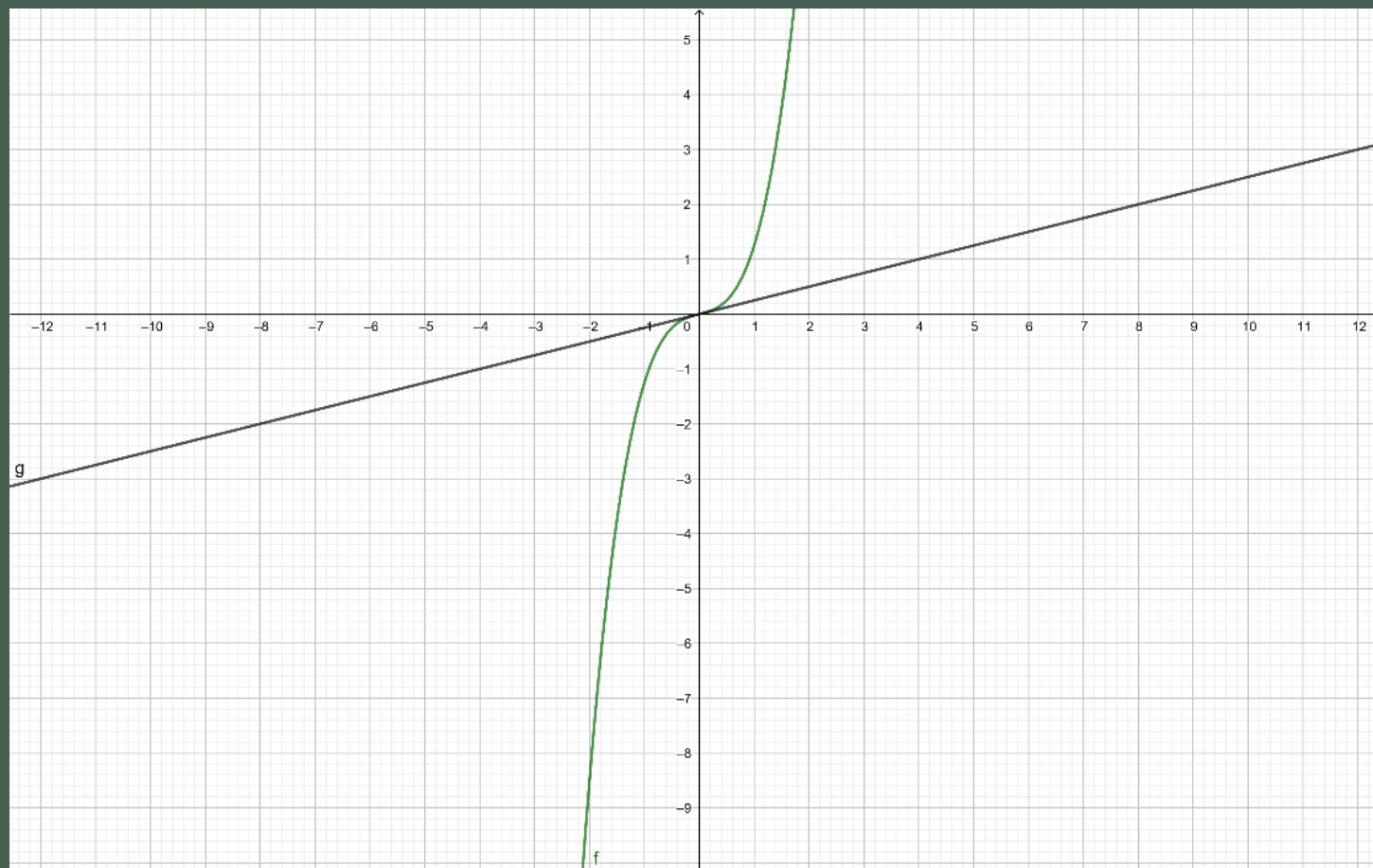


# УГЛОВИ И ГРАФИК ФУНКЦИЈЕ

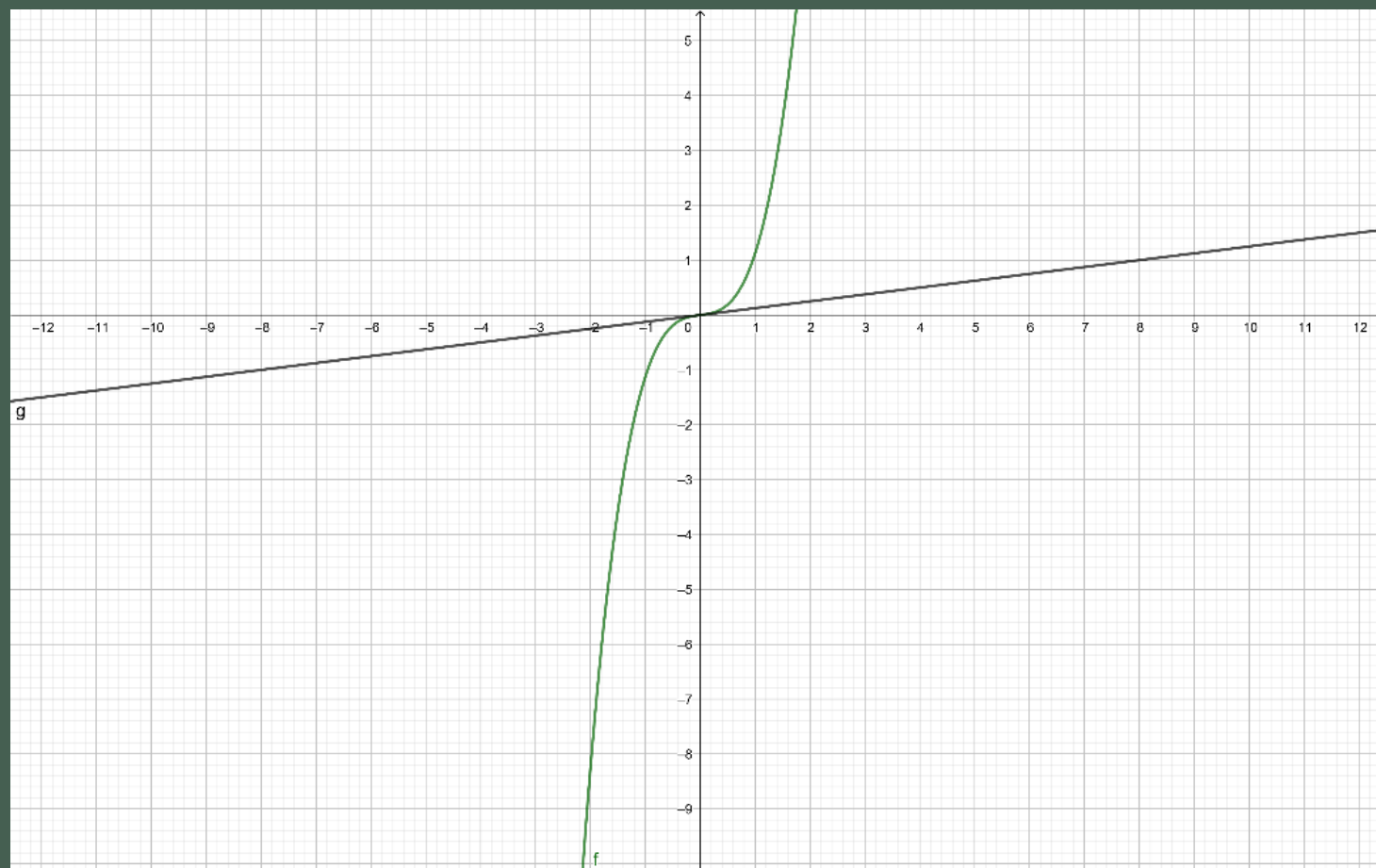
Милена Костадиновић, проф.  
Синиша Мозетић, проф.

# Уводни пример:

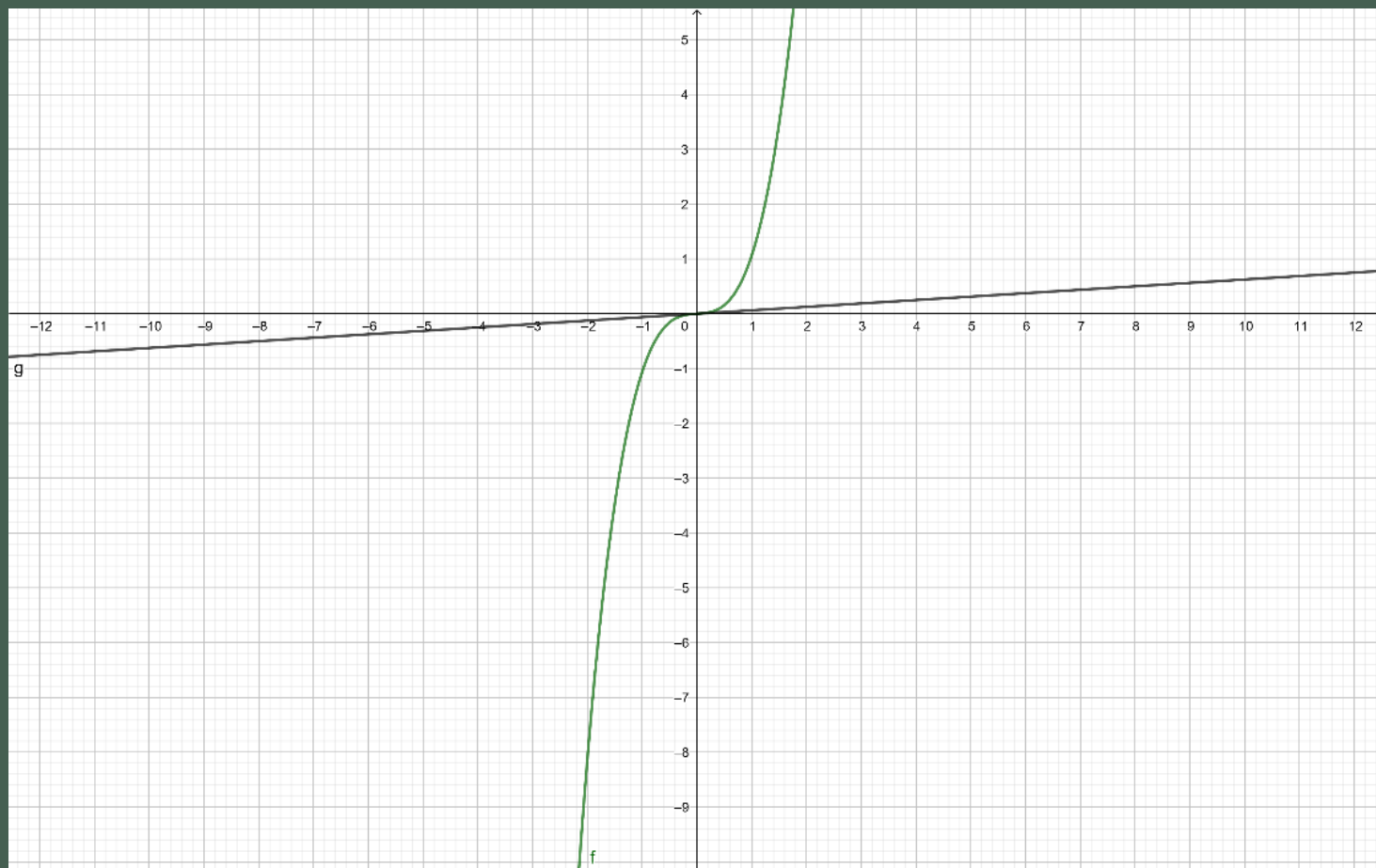
- На којој од датих слика је представљен график функције  $y = x^3$ , знајући да је дата права тангента функције на слици у тачки  $T(0,0)$ ?



Слика 1/3



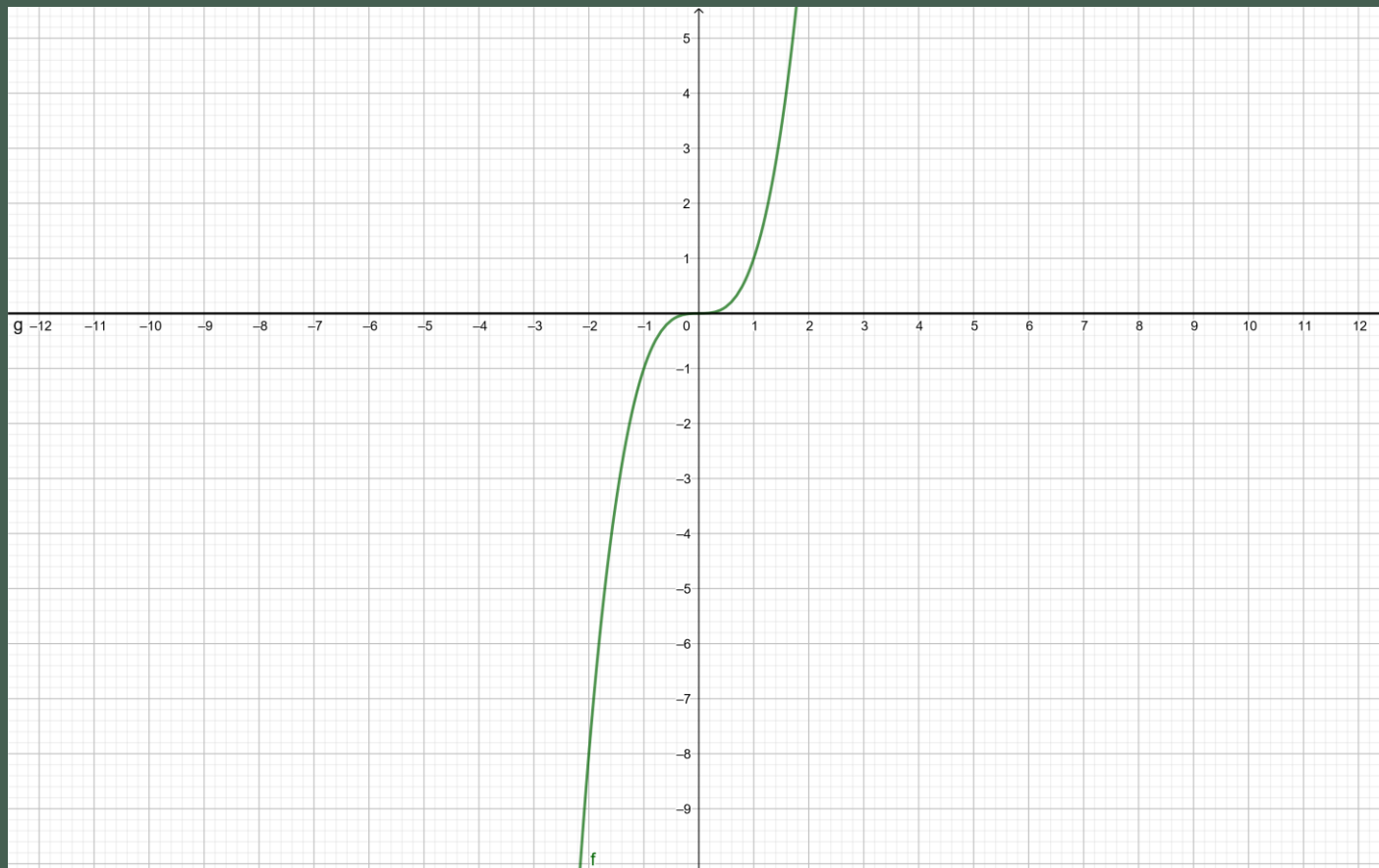
Слика 2/3



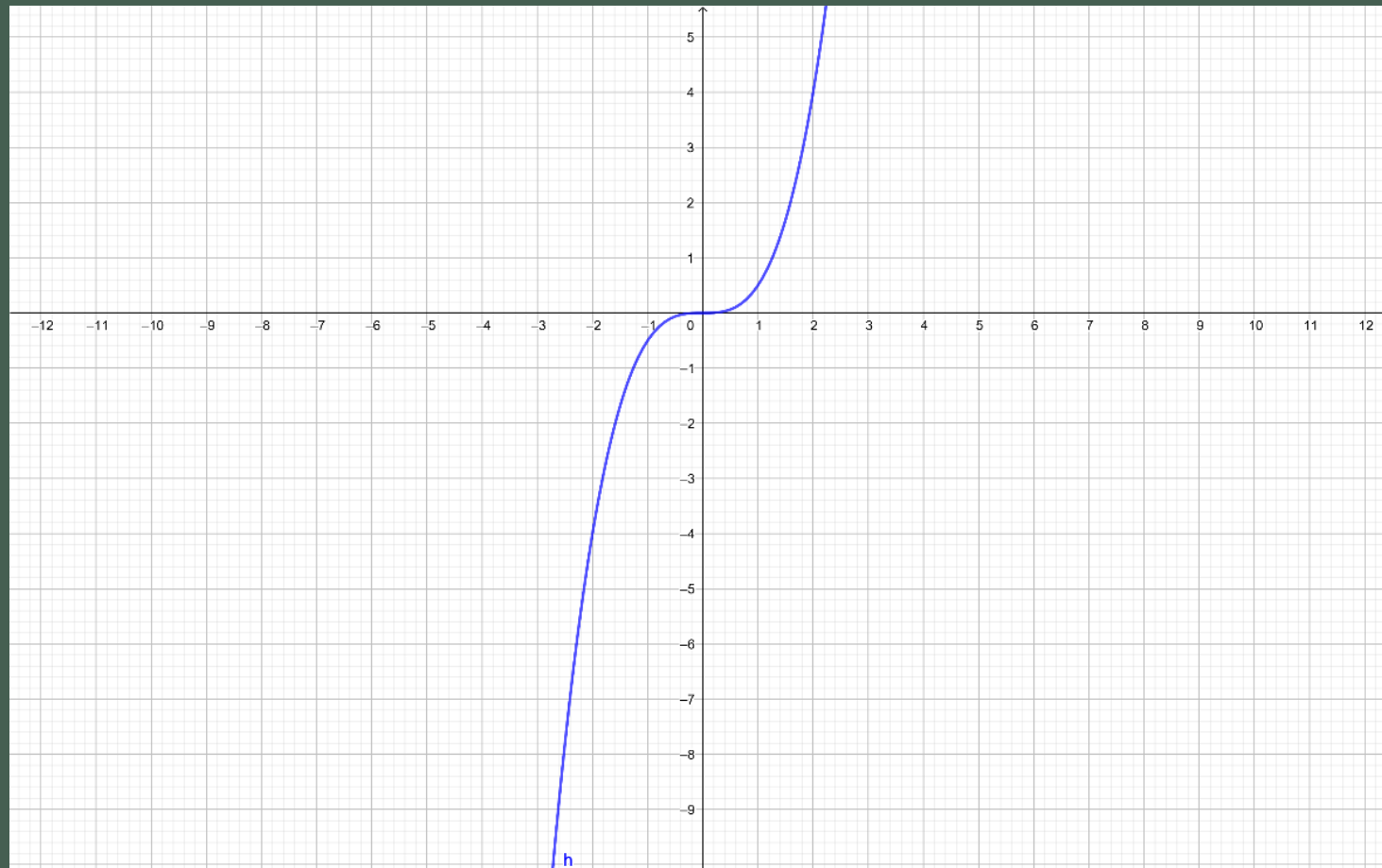
Слика 3/3

# Решење:

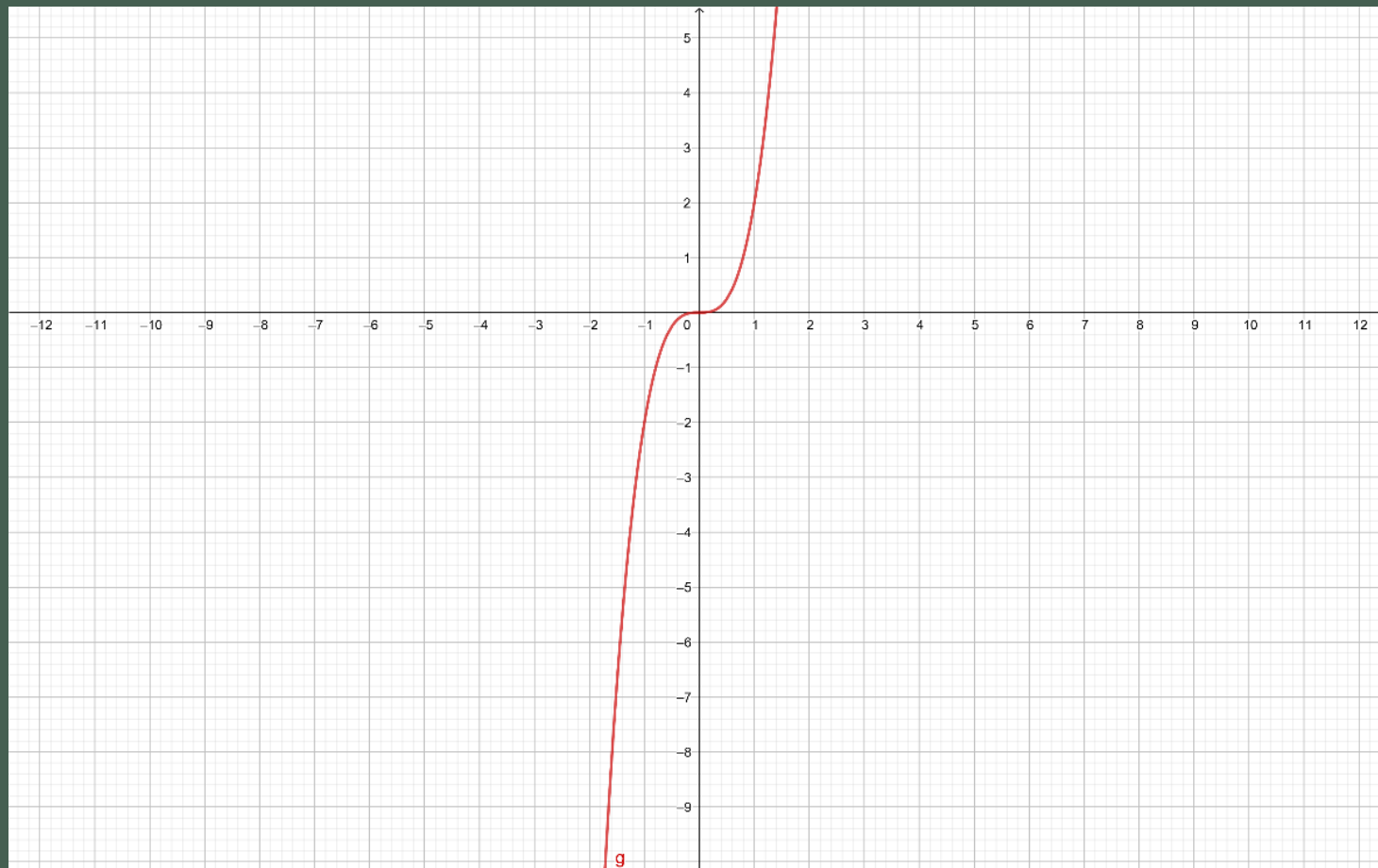
- Ни на једној од наведених.
- Једначина тангенте у тачки  $(0,0)$  је  $y = 0$



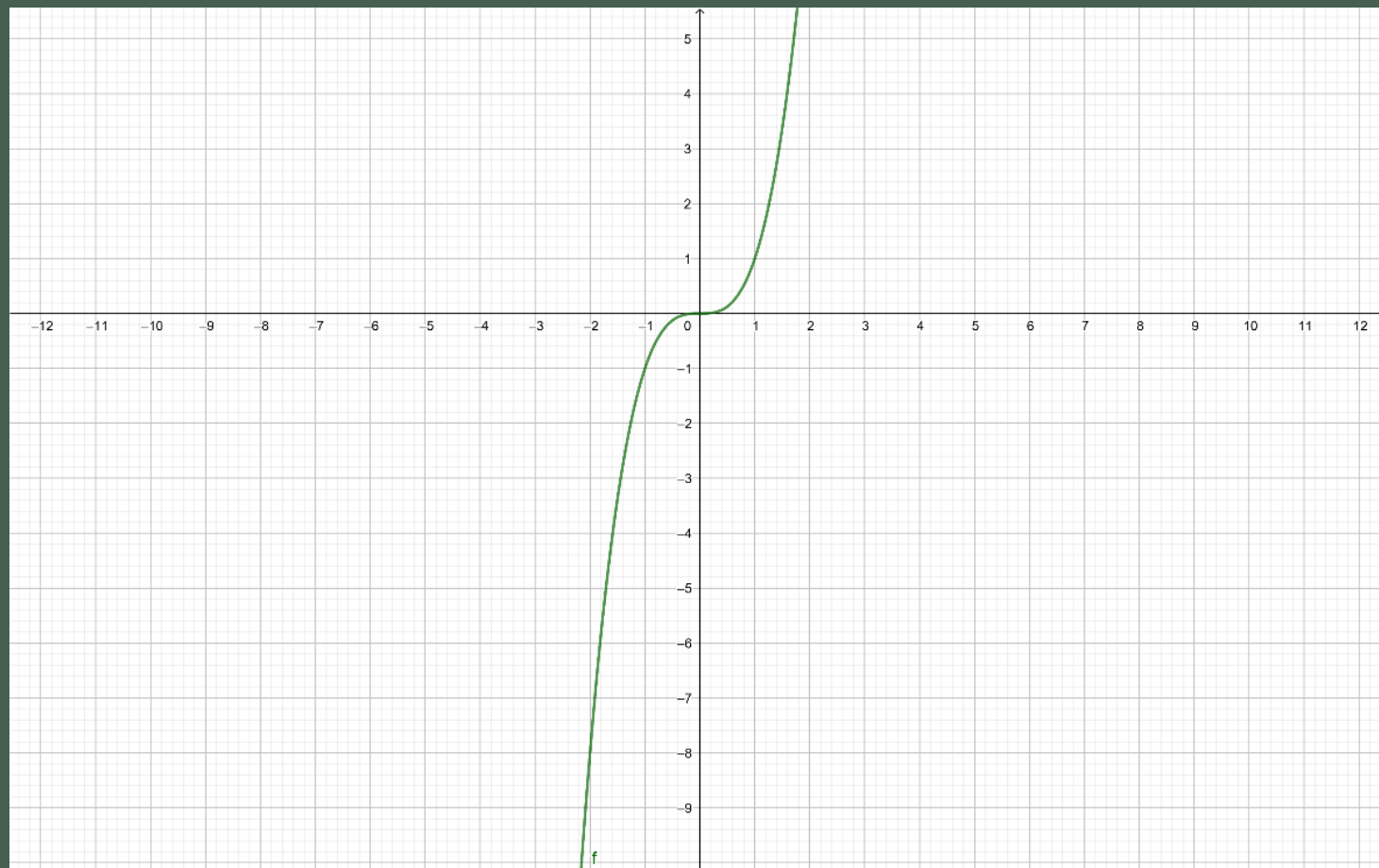
- На којој од датих слика је представљен график функције  $y = x^3$ , знајући да на једној од њих јесте график те функције?



Слика 1/3



Слика 2/3

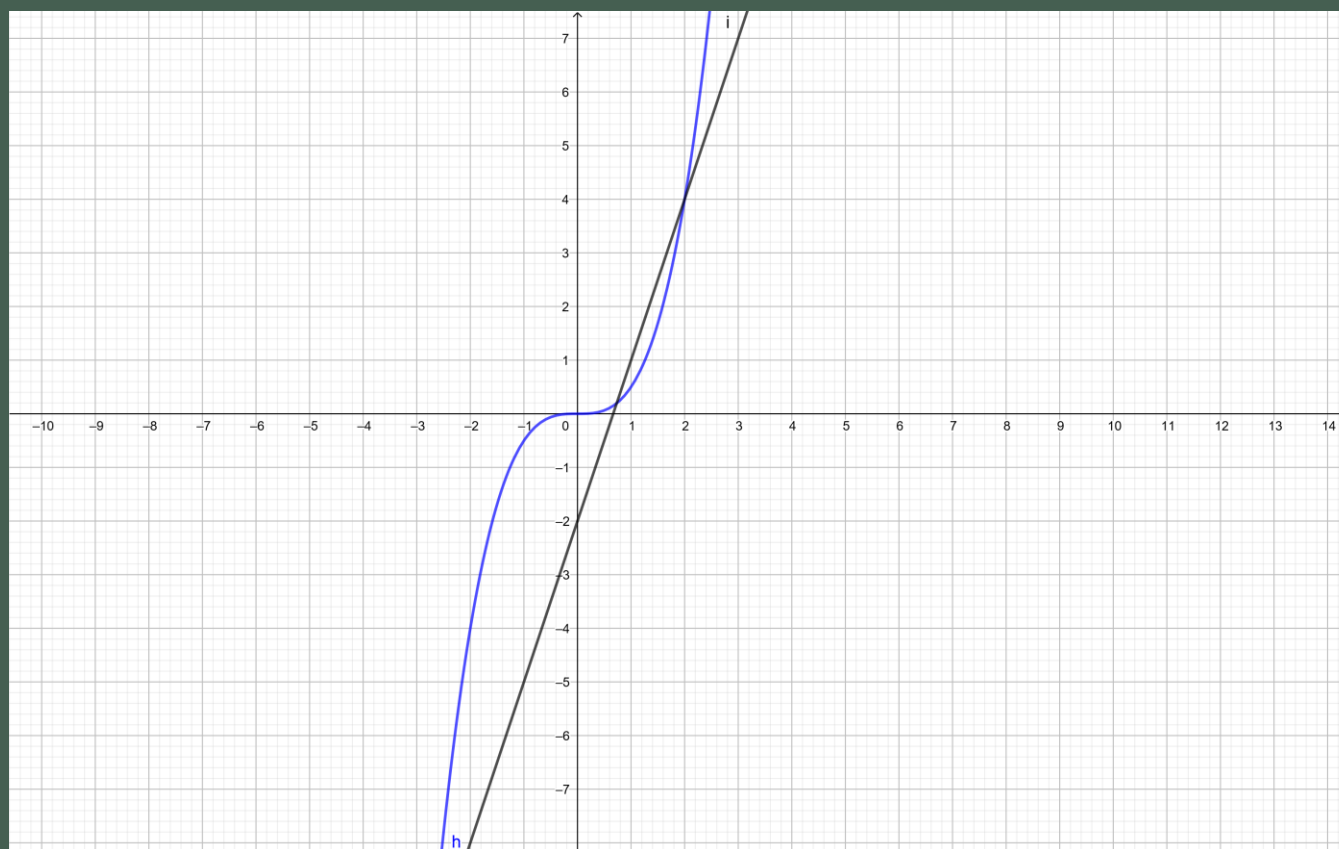


Слика 3/3

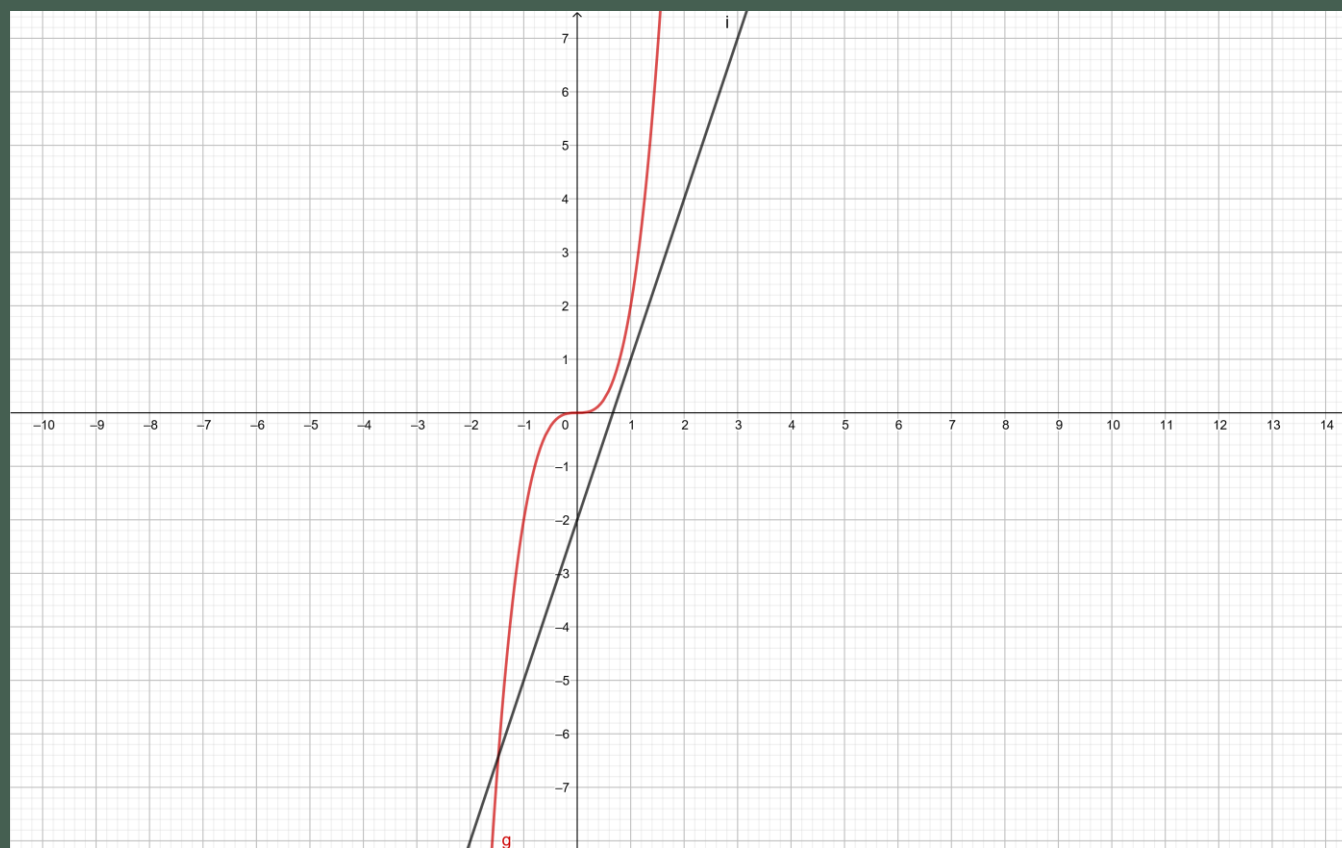


# Решење:

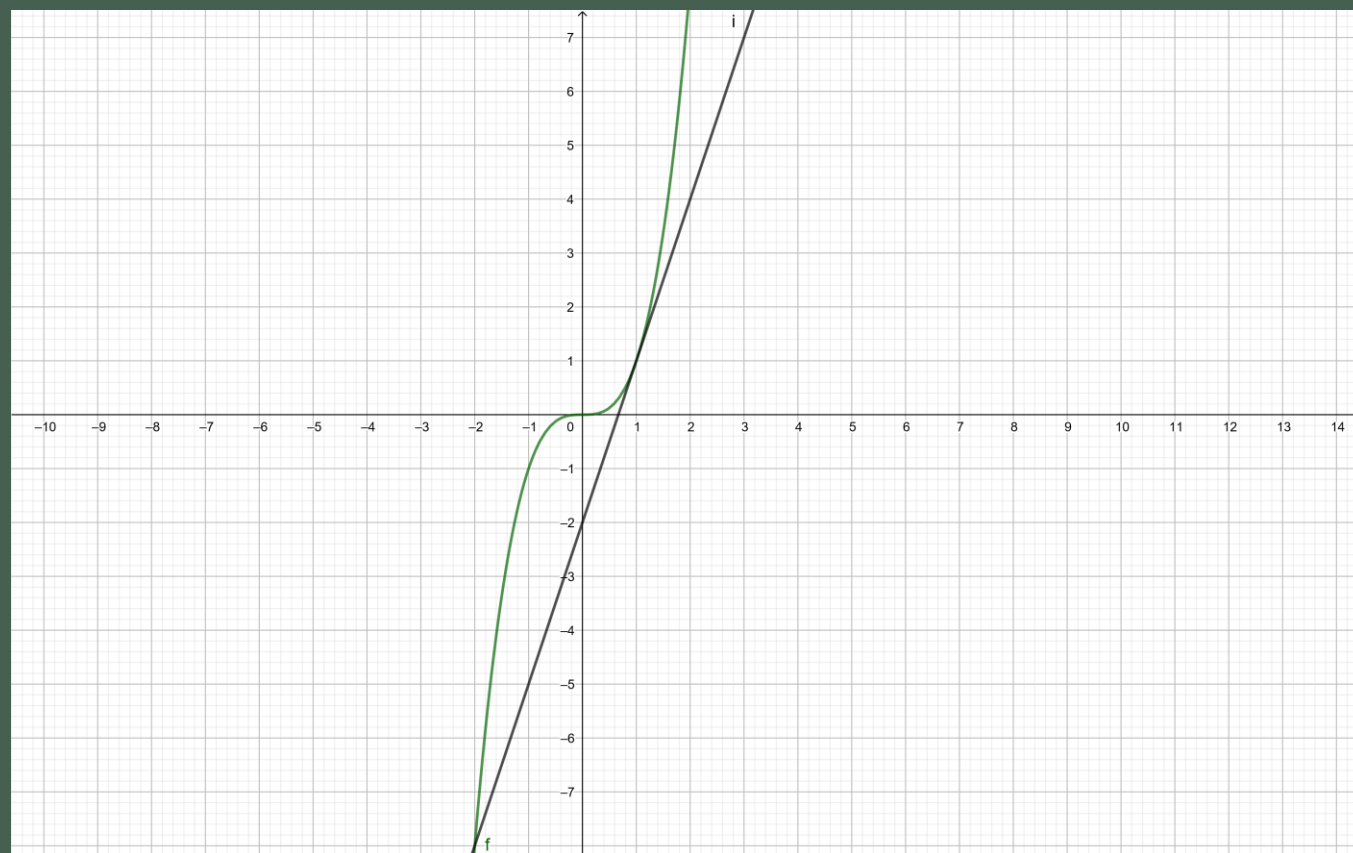
- До решења долазимо знајући да је тангента функције  $y = x^3$  у тачки  $T(1,1)$  права  $y=3x-2$ .



Слика 1/3



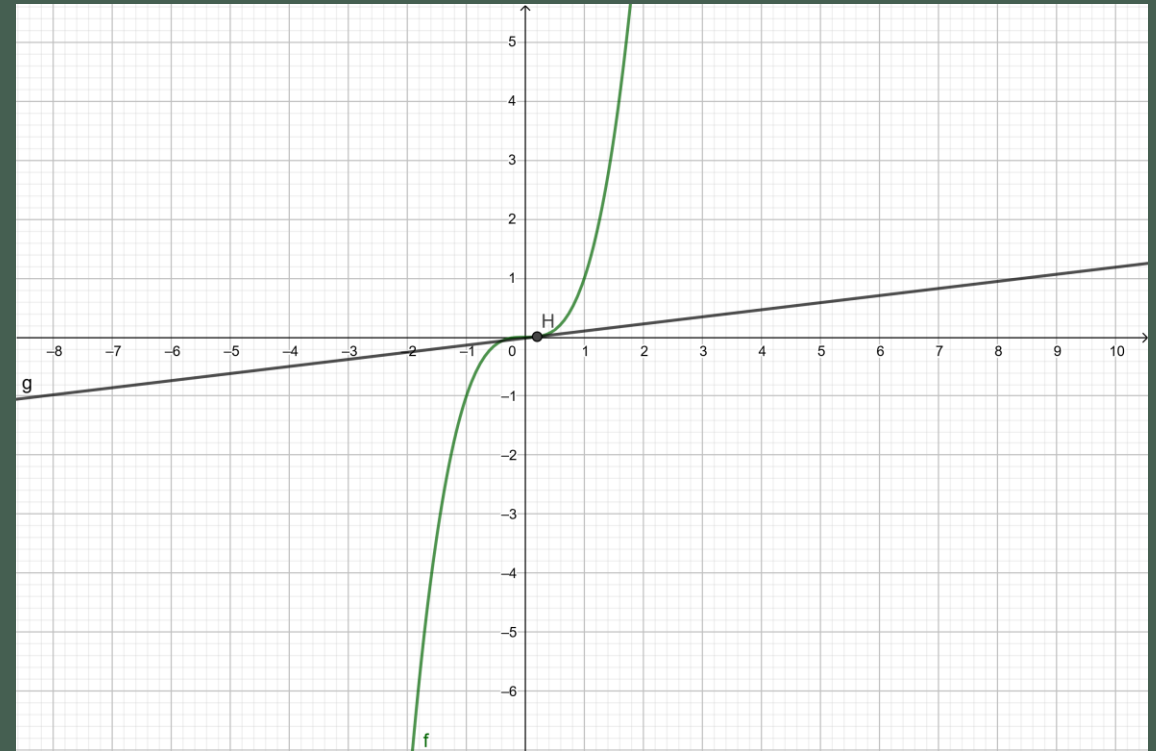
Слика 2/3



Слика 3/3

# Теорија

- Нека је функција  $f$  диференцијабилна на интервалу  $[a,b]$  и нека је тачка  $c$  унутрашња тачка тог интервала.
- Ако је  $T(c, f(c))$  превојна тачка функције  $f$  она је и тачка локалног екстремума углава које функција  $f$  на интервалу  $[a,b]$  заклапа са позитивним смером  $x$  осе.



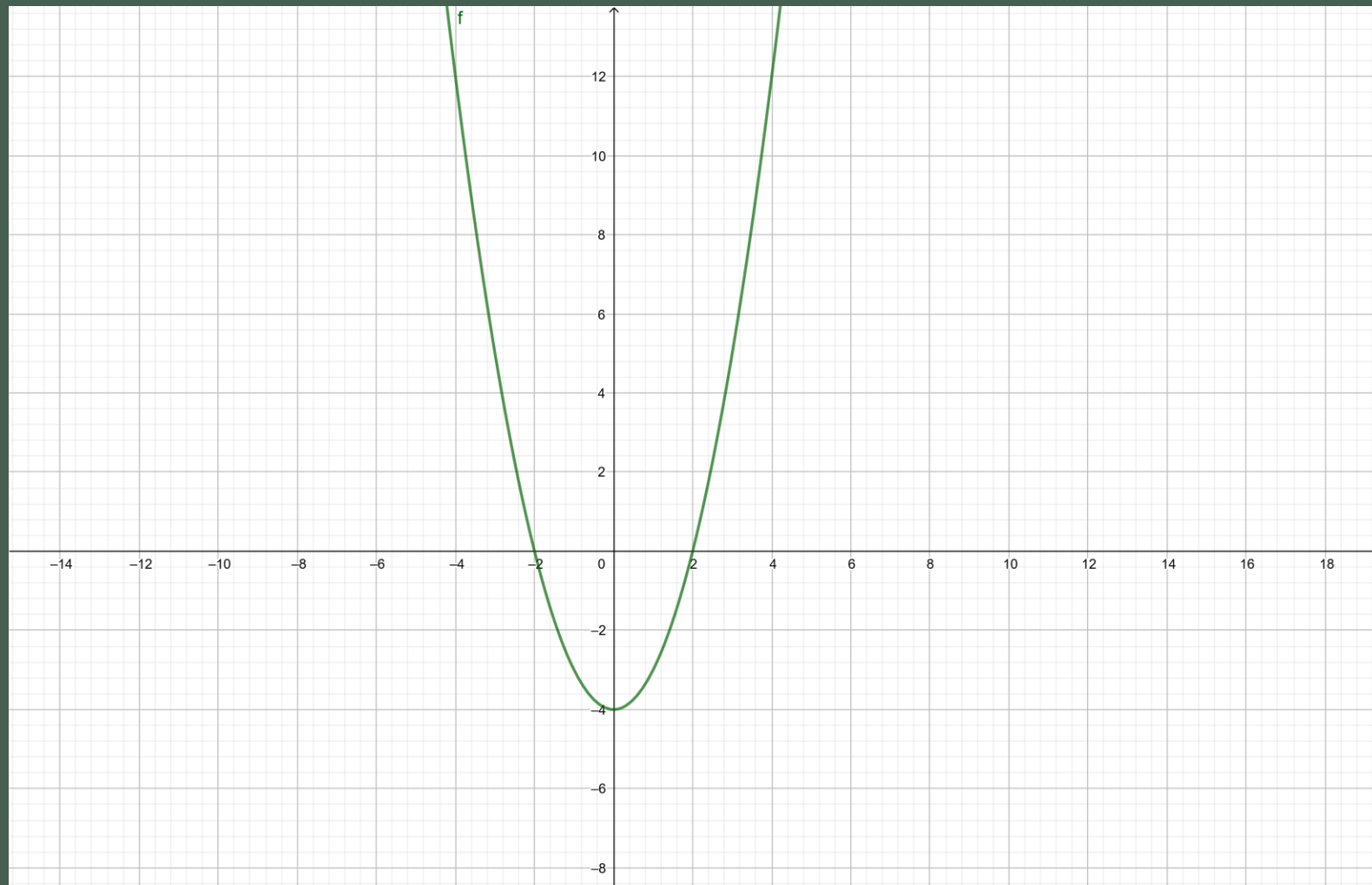
- Дефиниција бр. 1: Угао под којим дата крива сече дату праву је угао између тангенте функције у пресечној тачки криве са датом правом и дате праве.
- Дефиниција бр. 2: Угао између дате праве и криве у тачки која припада кривој је угао између те праве и тангенте криве у датој тачки.
- Теорема: Нека је функција  $f(x)$  непрекидна и диференцијабилна на интервалу  $[a, b]$ , осим можда у тачки  $T(x_T, y_T)$ ,  $x_T \in [a, b]$ .

- Означимо са  $t_1(x)$  тангенте функције  $f(x)$  на  $[a, b]$  за  $x < x_T$  и са  $t_2(x)$  тангенте функције  $f(x)$  на  $[a, b]$  за  $x > x_T$ .
- (Када је  $x_T$  гранична тачка датог интервала не морају постојати тангенте  $t_1$  или  $t_2$ .)
- Нека је:
- $\lim_{x \rightarrow x_T} t_1(x) = t_l$  (1)
- и
- $\lim_{x \rightarrow x_T} t_2(x) = t_d$  (2)
- Праве  $t_l$  и  $t_d$ , када постоје, одређују угао (углове) које дата крива у датој тачки  $T$  заклапа са позитивним делом  $x$  осе. Ово је посебно значајно када је тачка једна од значајних (нула, гранична, екстремна или превојна тачка дате функције).

# 1. ЗАДАТАК

- Одредити углове под којим  $x$  оса сече криву и решење представити графички

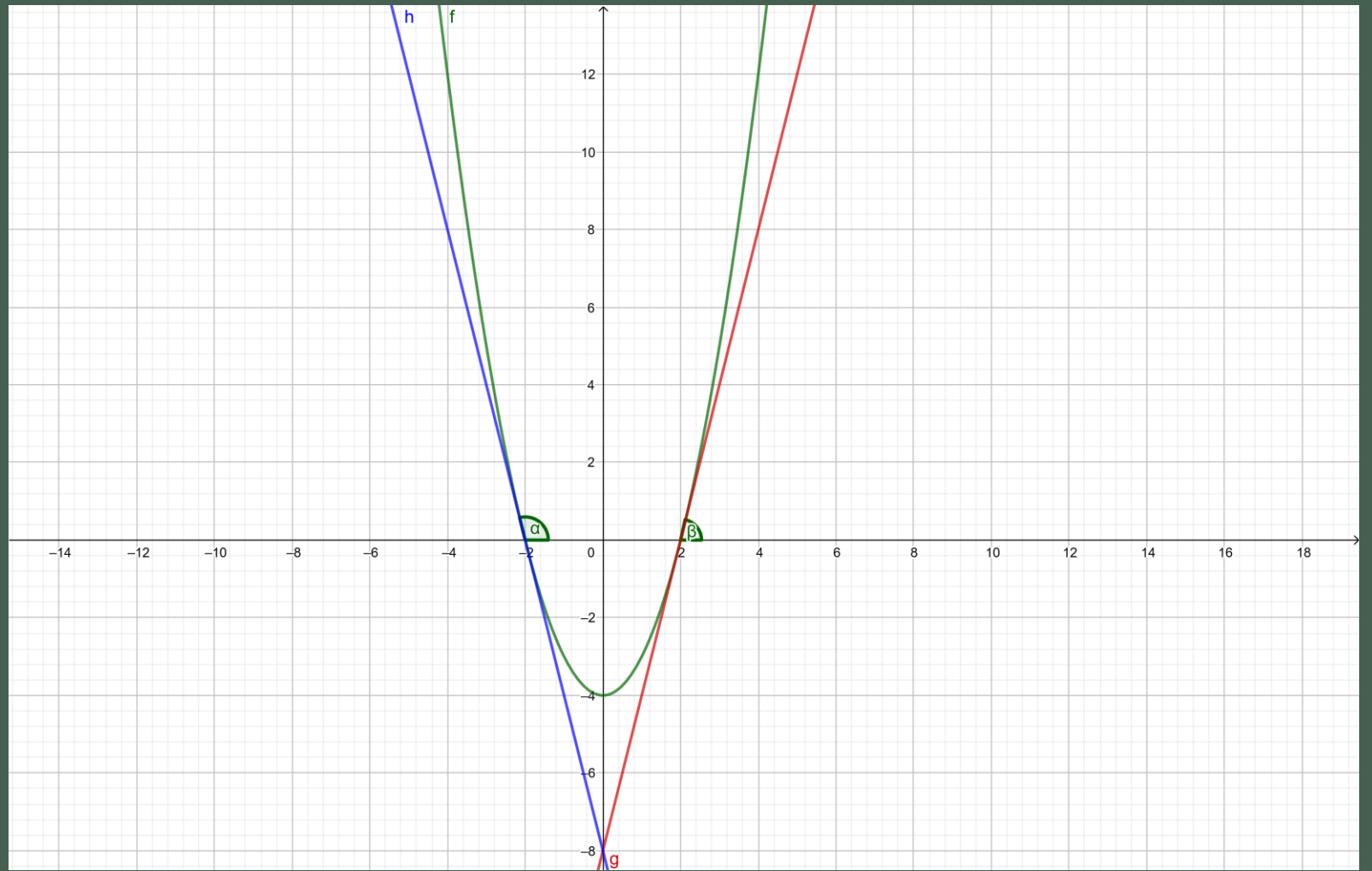
а)  $y = x^2 - 4$



# Решење:

Угао под којим  $x$  оса сече криву  $y=x^2-4$  у тачки  $A(-2,0)$

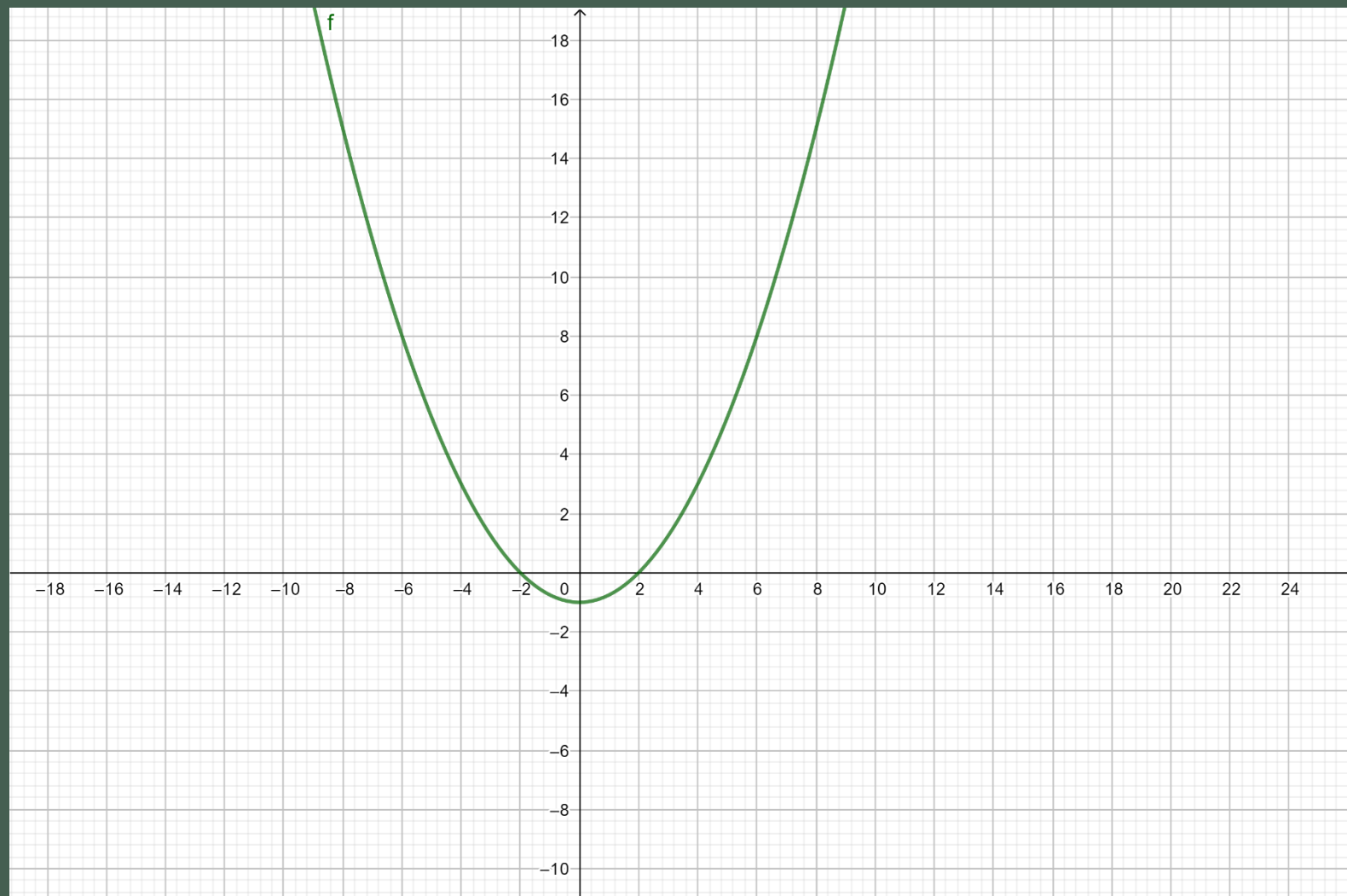
је  $\alpha=\pi-\arctg 4$ , а угао под којим  $x$  оса сече криву  $y=x^2-4$  у тачки  $B(2,0)$  је  $\beta=\arctg 4$ .





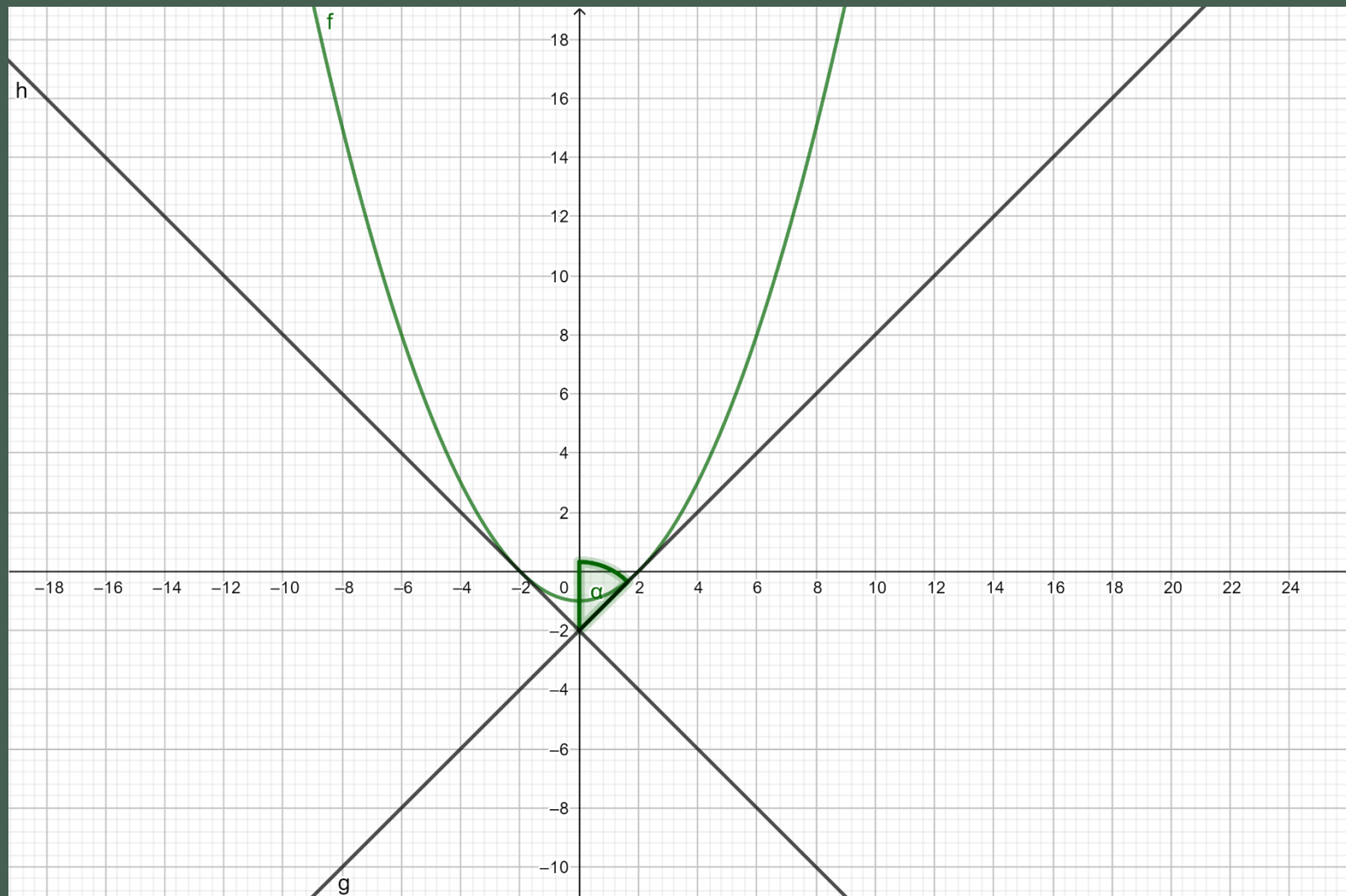
- Одредити углове под којим  $x$  оса сече криву и решење представити графички

b)  $y = \frac{1}{4}(x^2 - 4)$



# Решење:

Угао под којим  $x$  оса  
сече криву  $y = \frac{1}{4}(x^2 - 4)$   
је  $\alpha = 45^\circ$

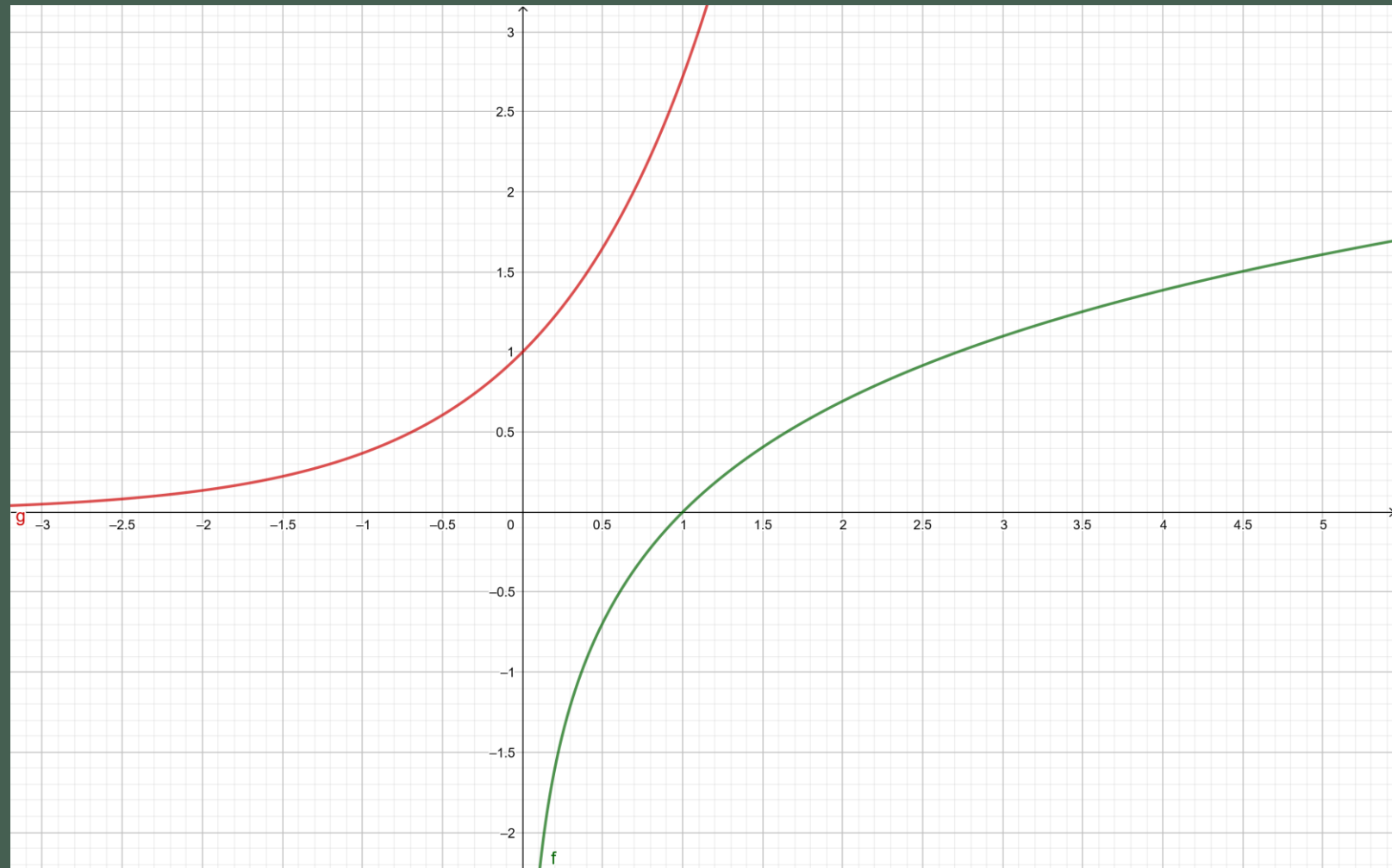


## 2. ЗАДАТАК

• Одредити угао под којим:

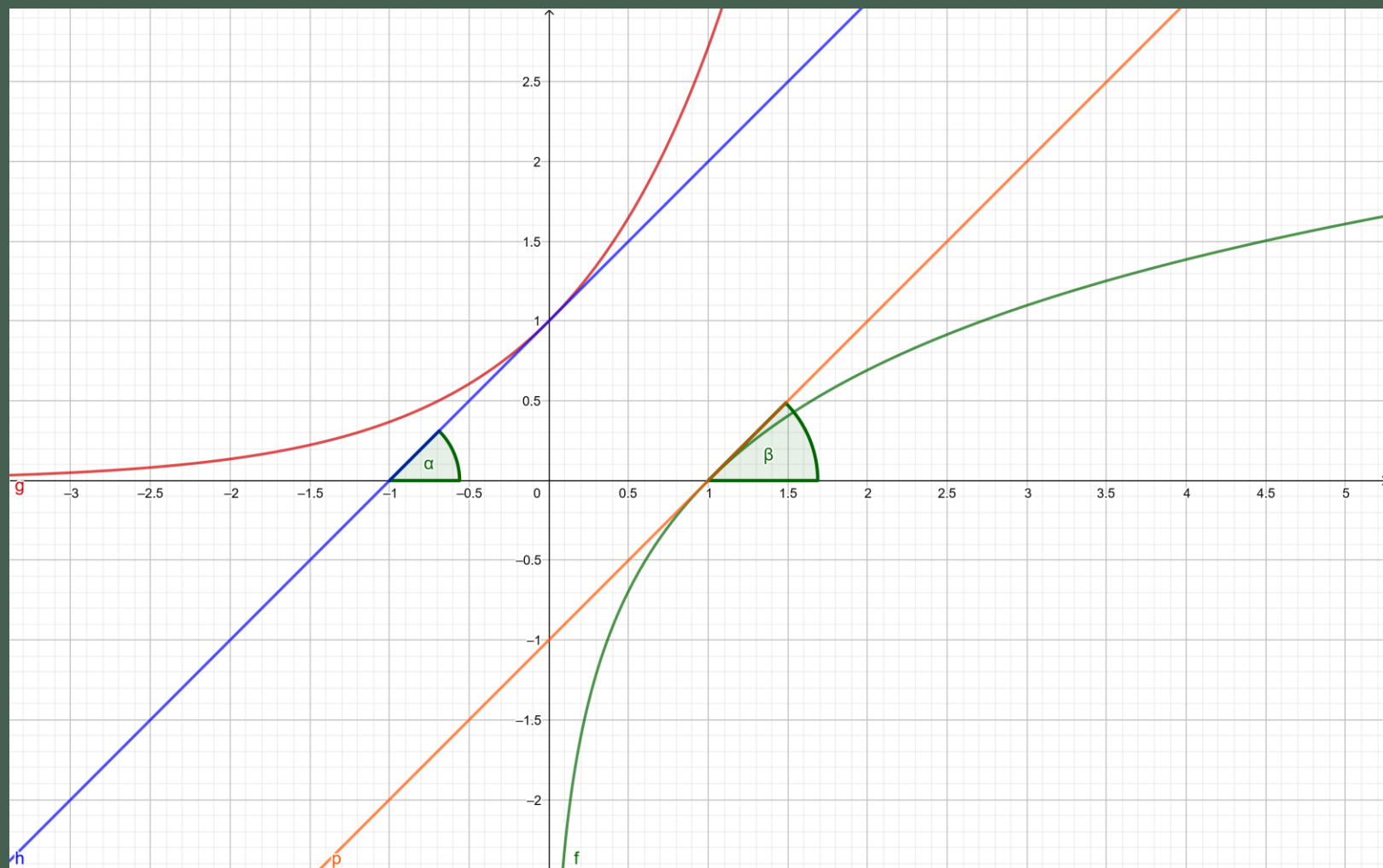
a) крива  $y = \ln x$  сече  $x$  осу

b) крива  $y = e^x$  сече  $y$  осу



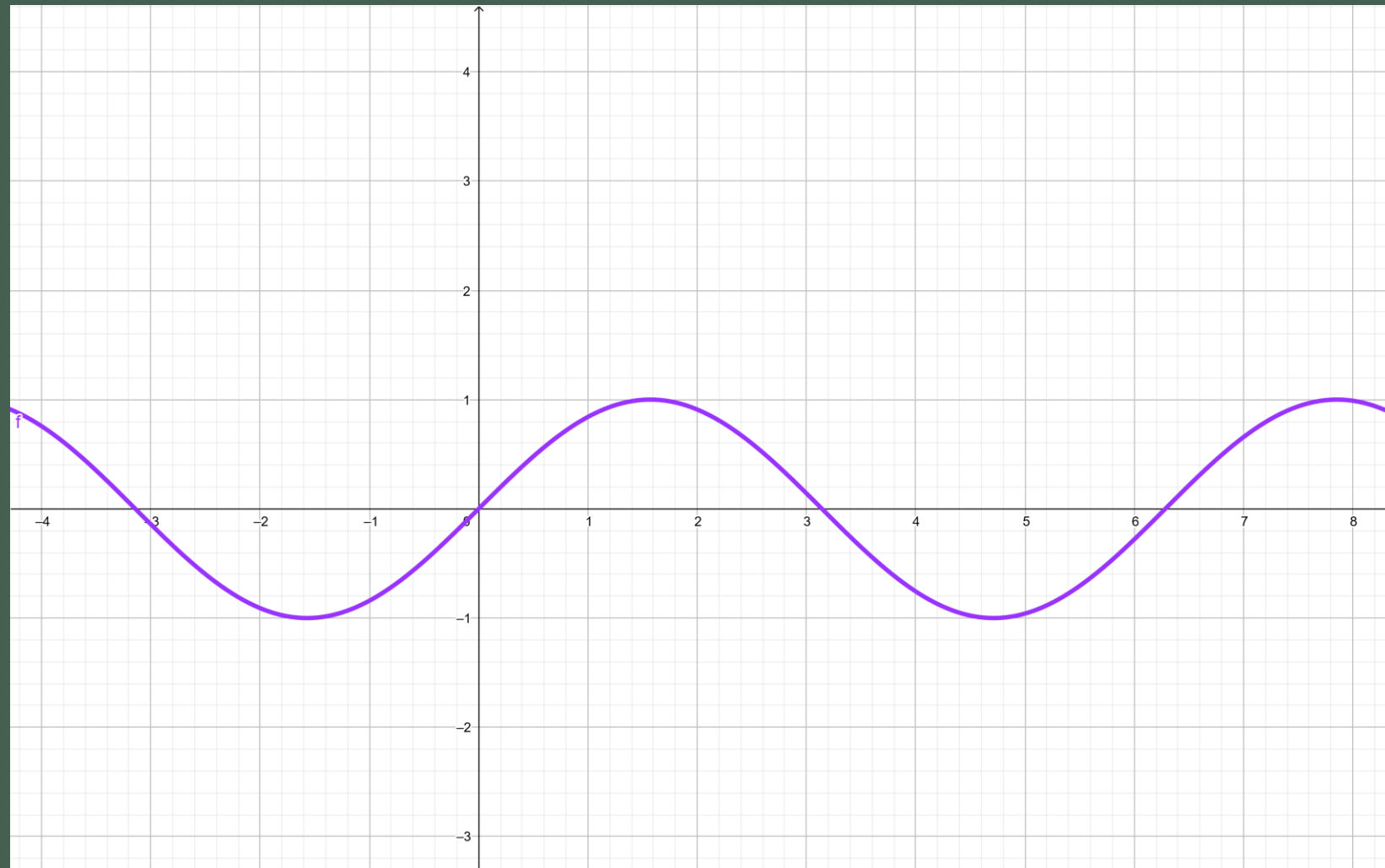
Решење:

$$\alpha = \beta = 45^\circ$$



# 3. ЗАДАТАК

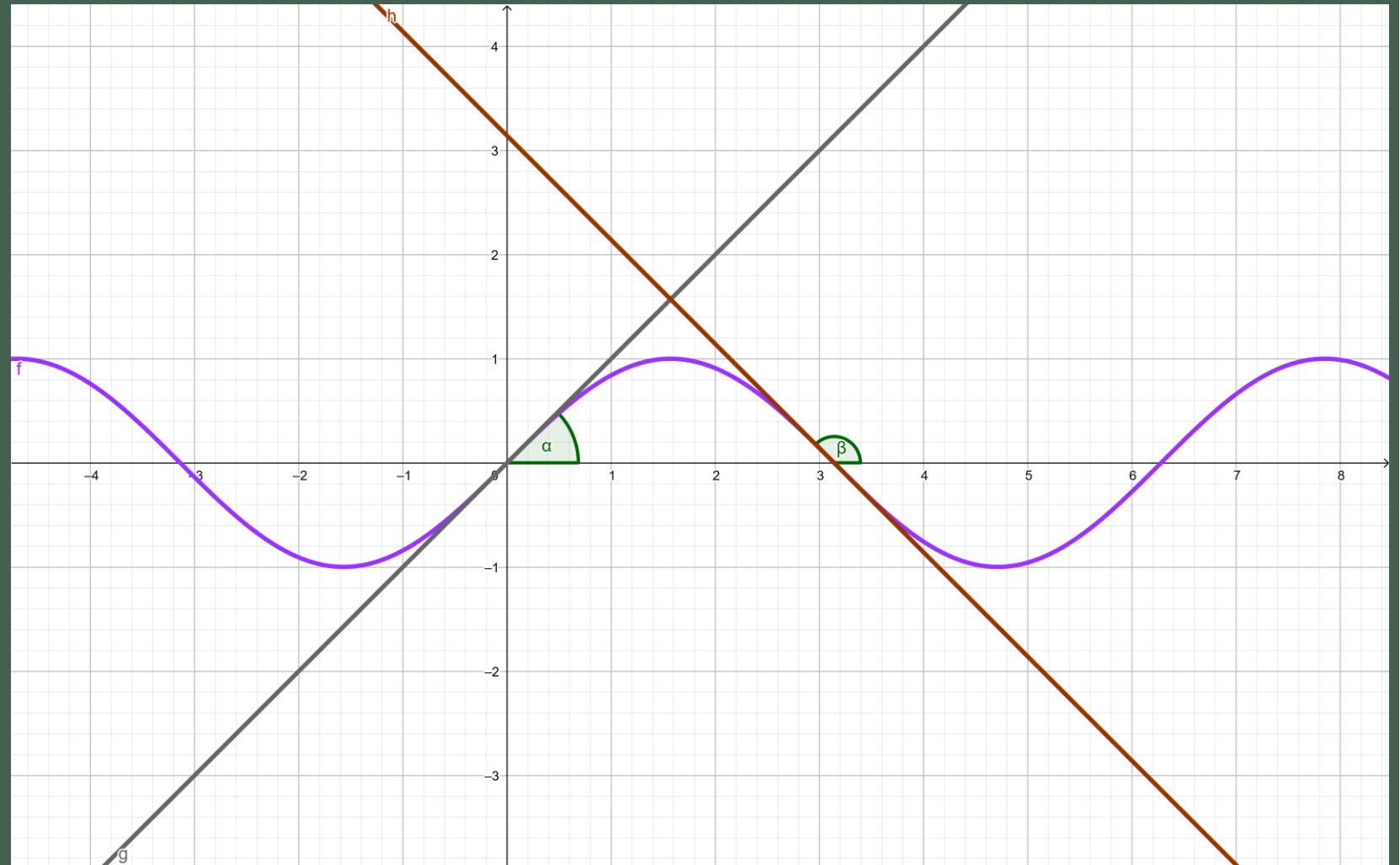
- Одредити углове под којим крива  $y = \sin x$  сече  $x$  осу.



# Решение:

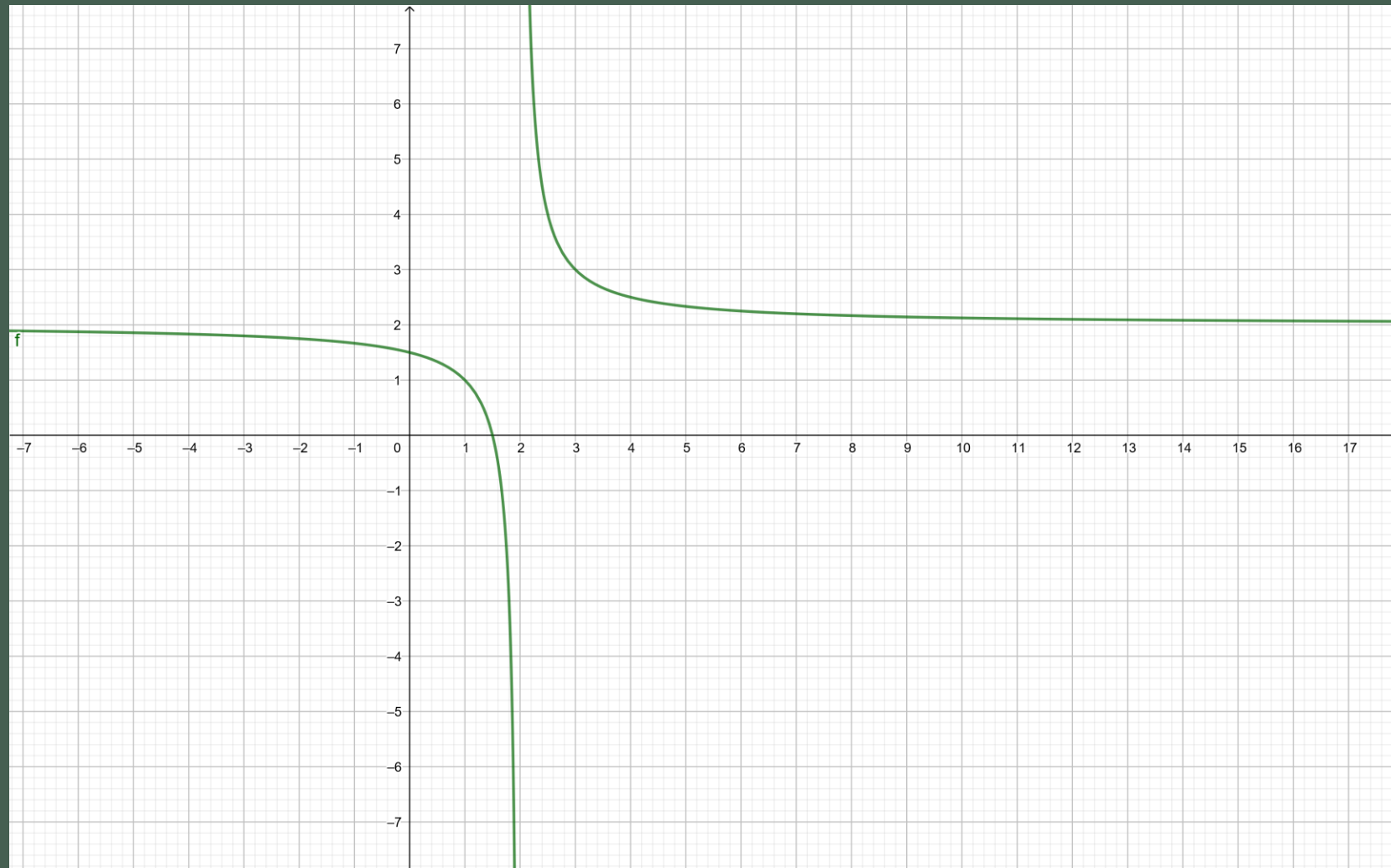
$$\alpha = 45^\circ, \beta = 135^\circ$$

$$A(0,0), B(\pi,0)$$



# 4. ЗАДАТАК

- Одредити углове под којим крива  $y = \frac{2x-3}{x-2}$  сече  $x$  и  $y$  осу.



# Решение:

$$A(6,0), \beta = \arctg\left(-\frac{1}{4}\right) + \pi,$$

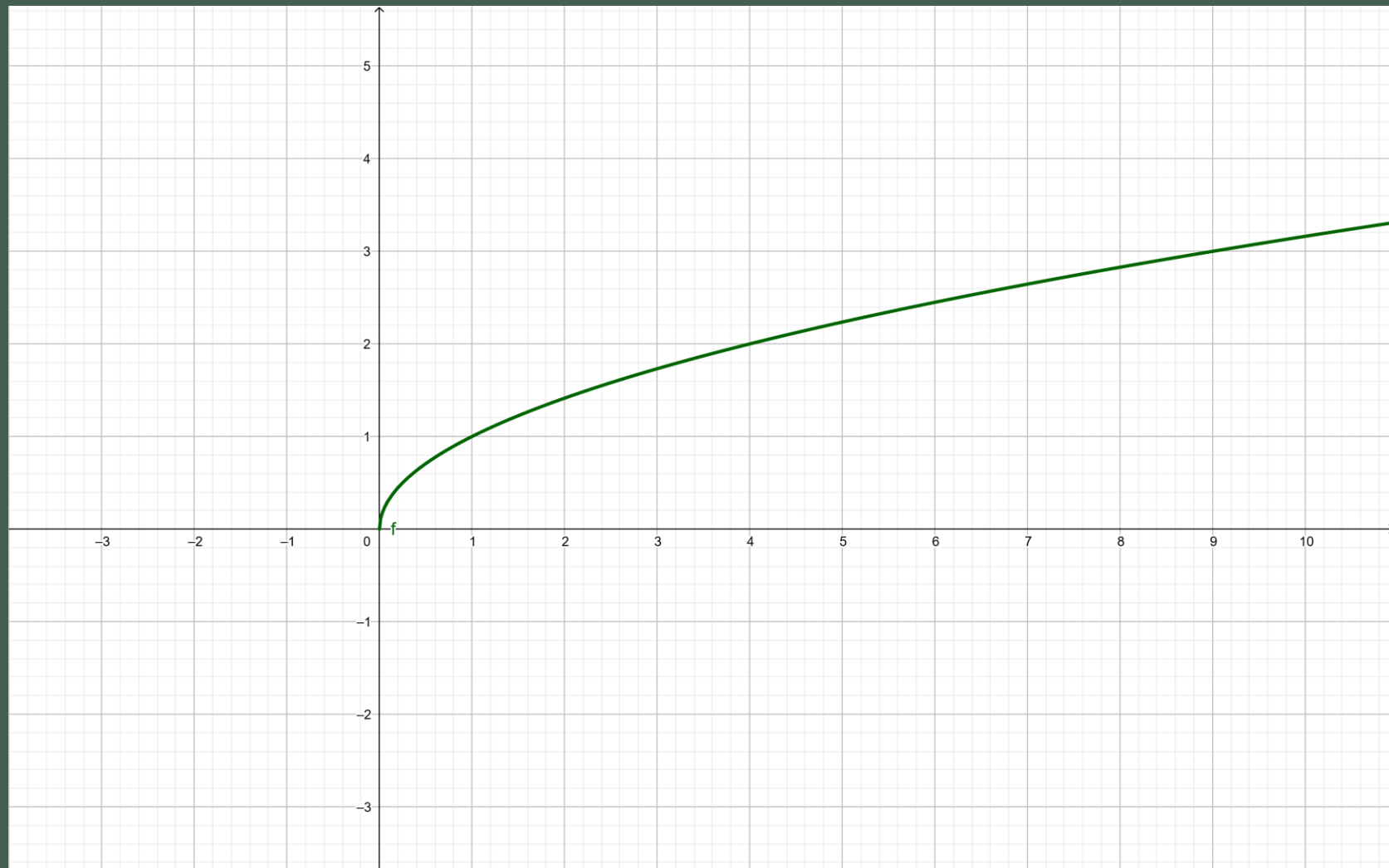
$$\alpha = \arctg(-4) + \pi$$





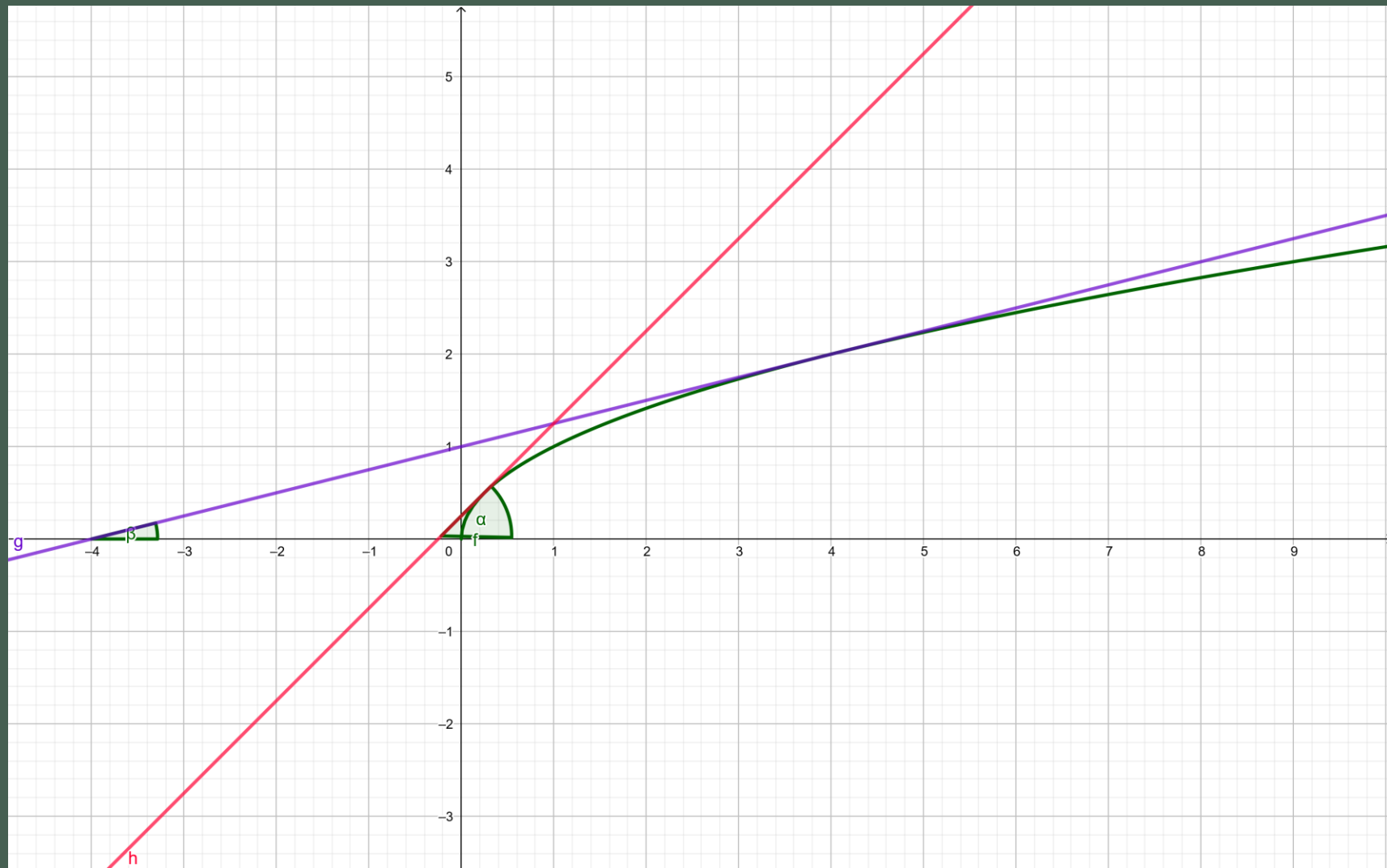
# 5. ЗАДАТАК

- Одредити углове које крива  $y = \sqrt{x}$  у тачкама  $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$  и  $B(4, 2)$  заклапа са  $x$  осом.



Решение:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \text{ и } \beta = \operatorname{arctg} \frac{1}{4}$$

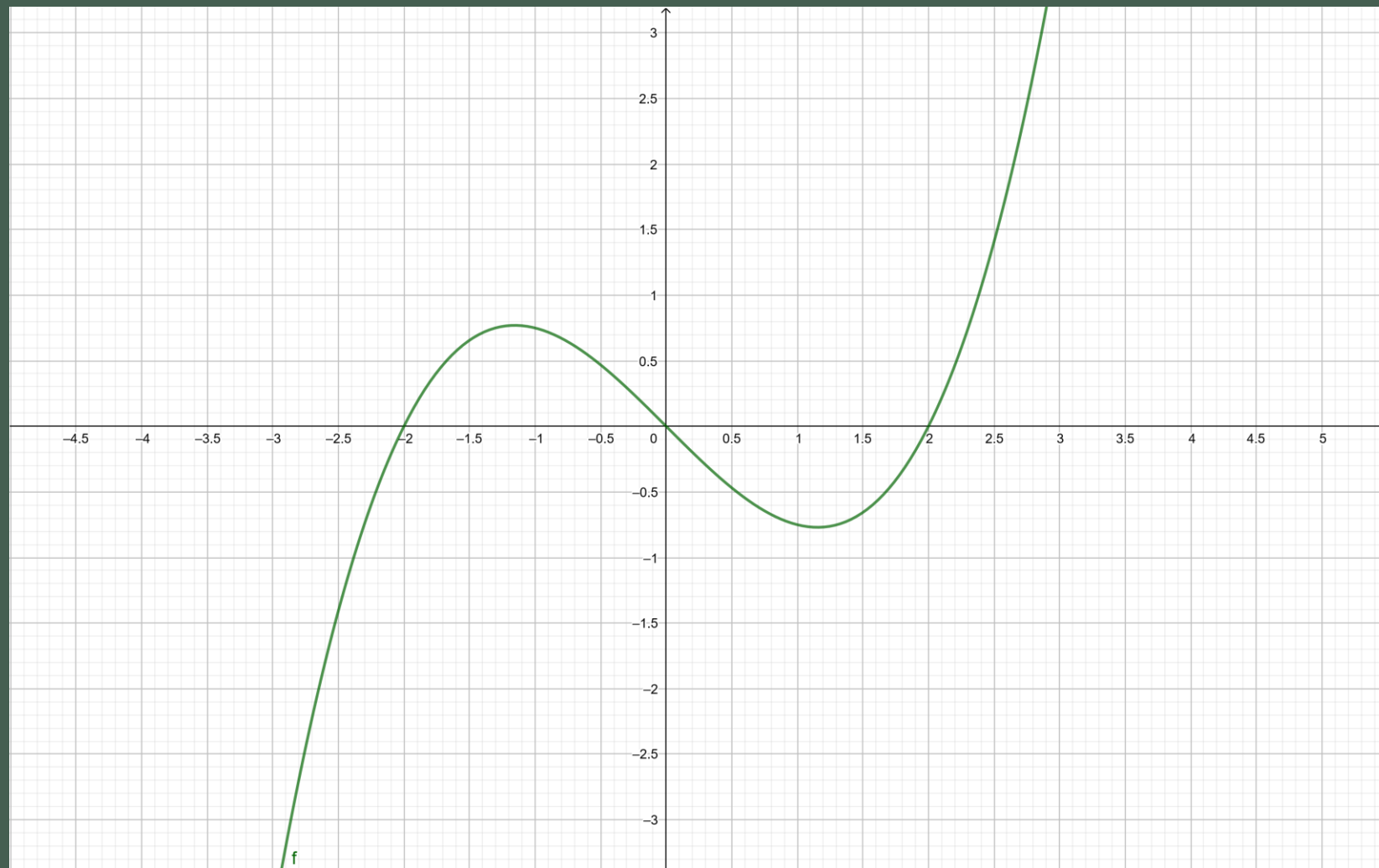


# Задаци за вежбу

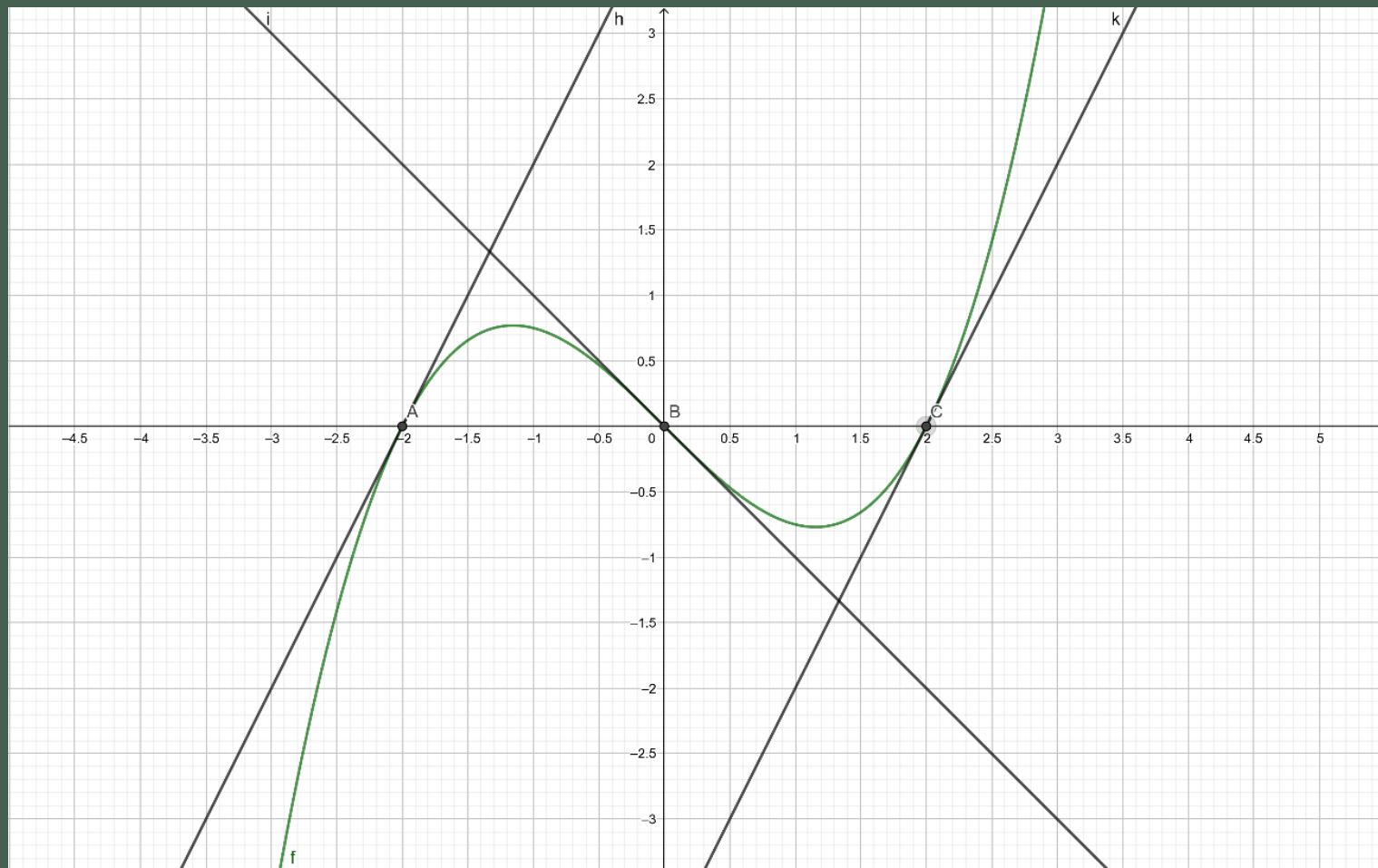
- Одредити углове које заклапа крива  $y$  са позитивним делом  $x$  осе неким од значајних тачака и дати геометријску интерпретацију.

# 1. ЗАДАЧА

$$\bullet y = \frac{x^3 - 4x}{4}$$

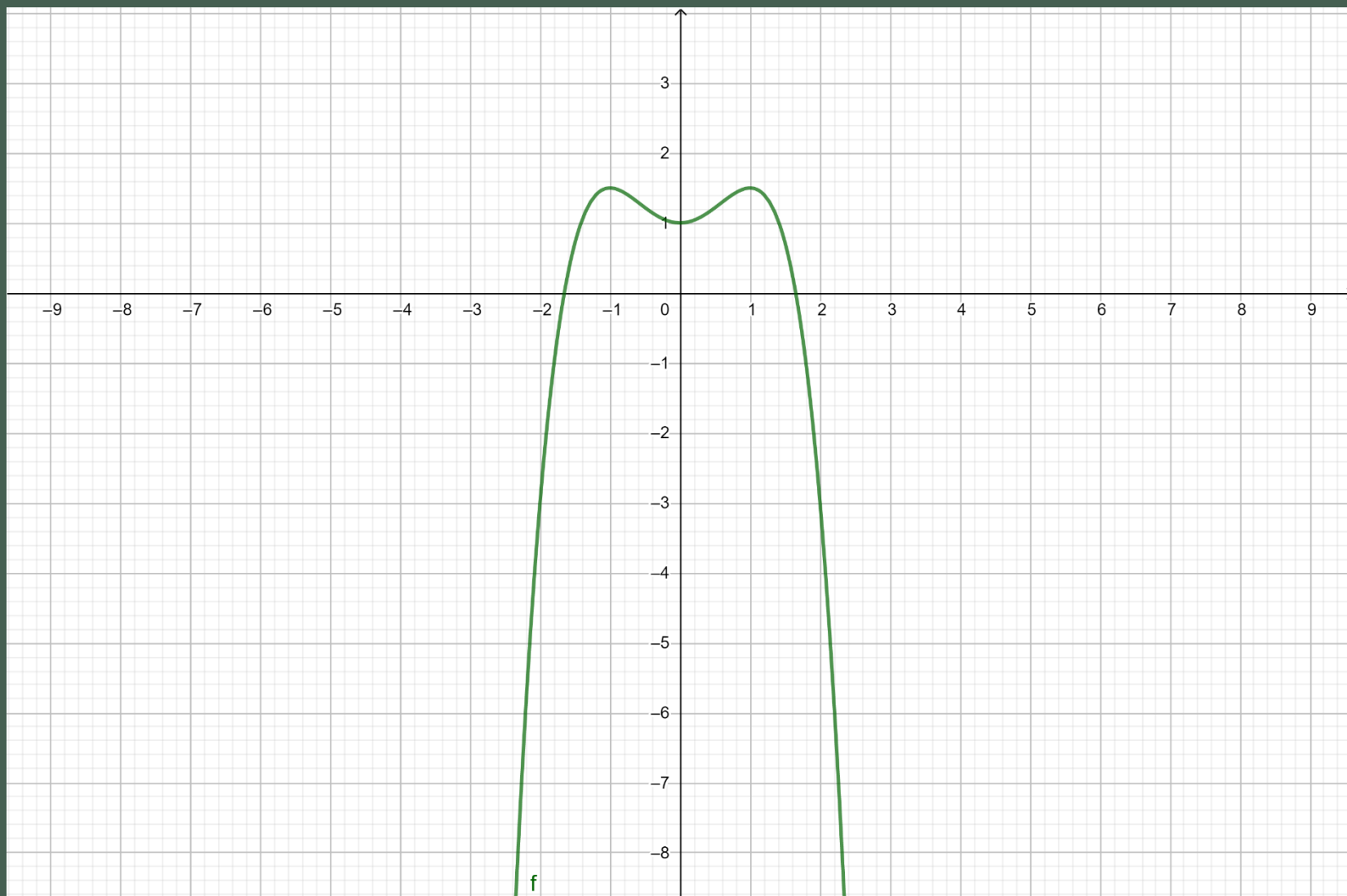


# 1. задатак – углови у нулама функције

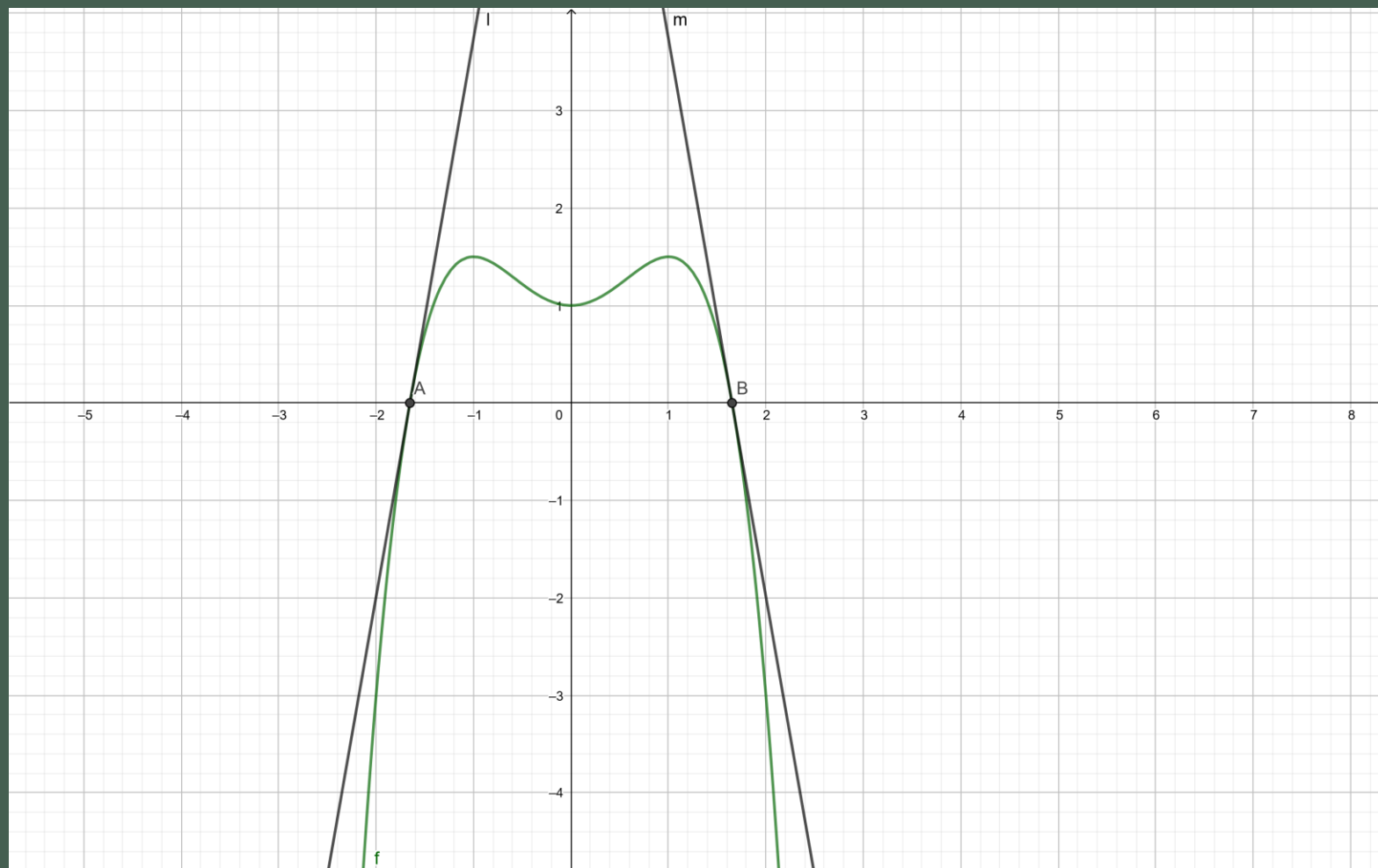


## 2. ЗАДАТАК

$$\cdot y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$$

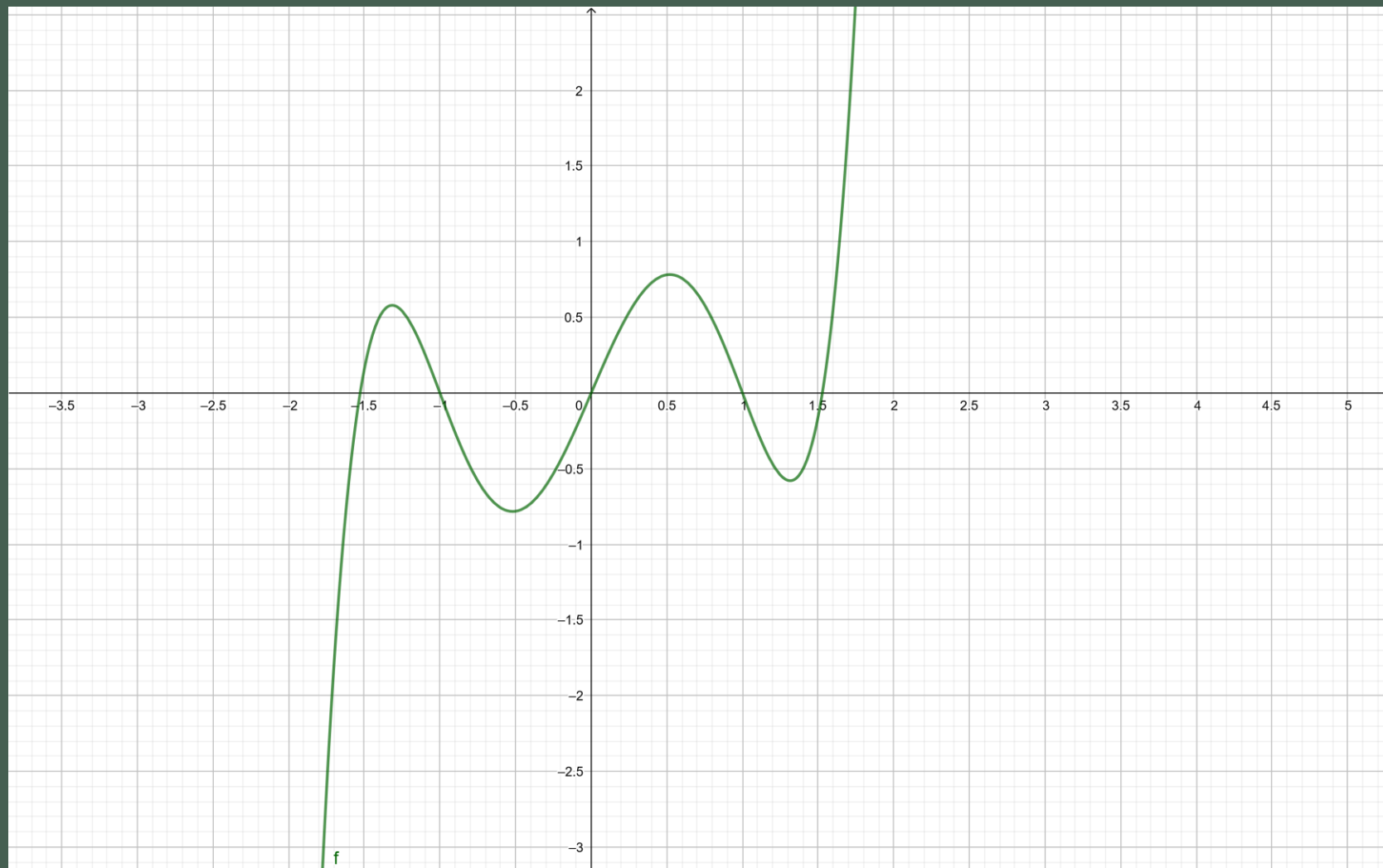


## 2. задатак – углови у нулама функције



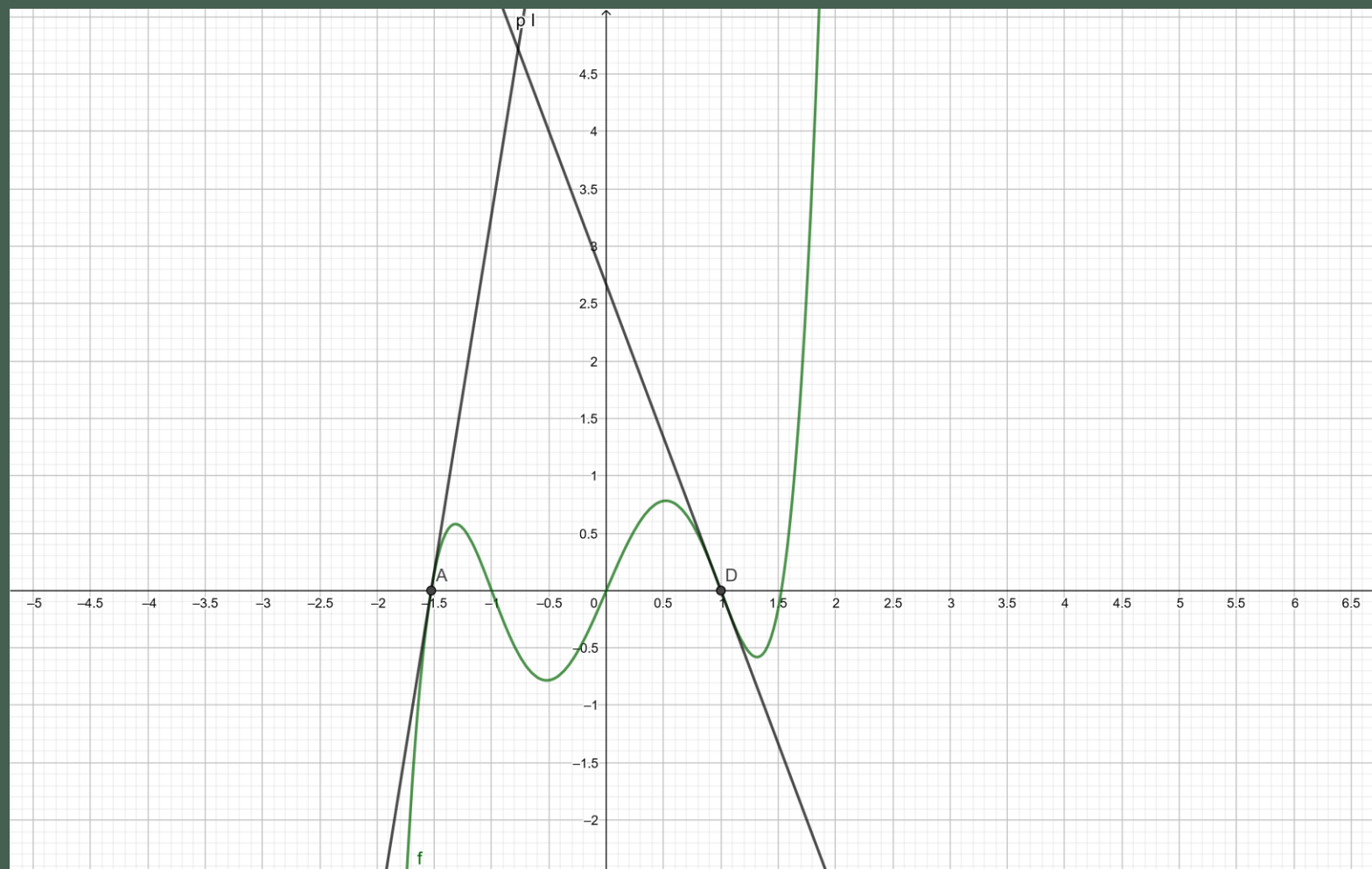
### 3. ЗАДАТАК

$$\dot{\circ} y = x^5 - \frac{10}{3}x^3 + \frac{7}{3}x$$



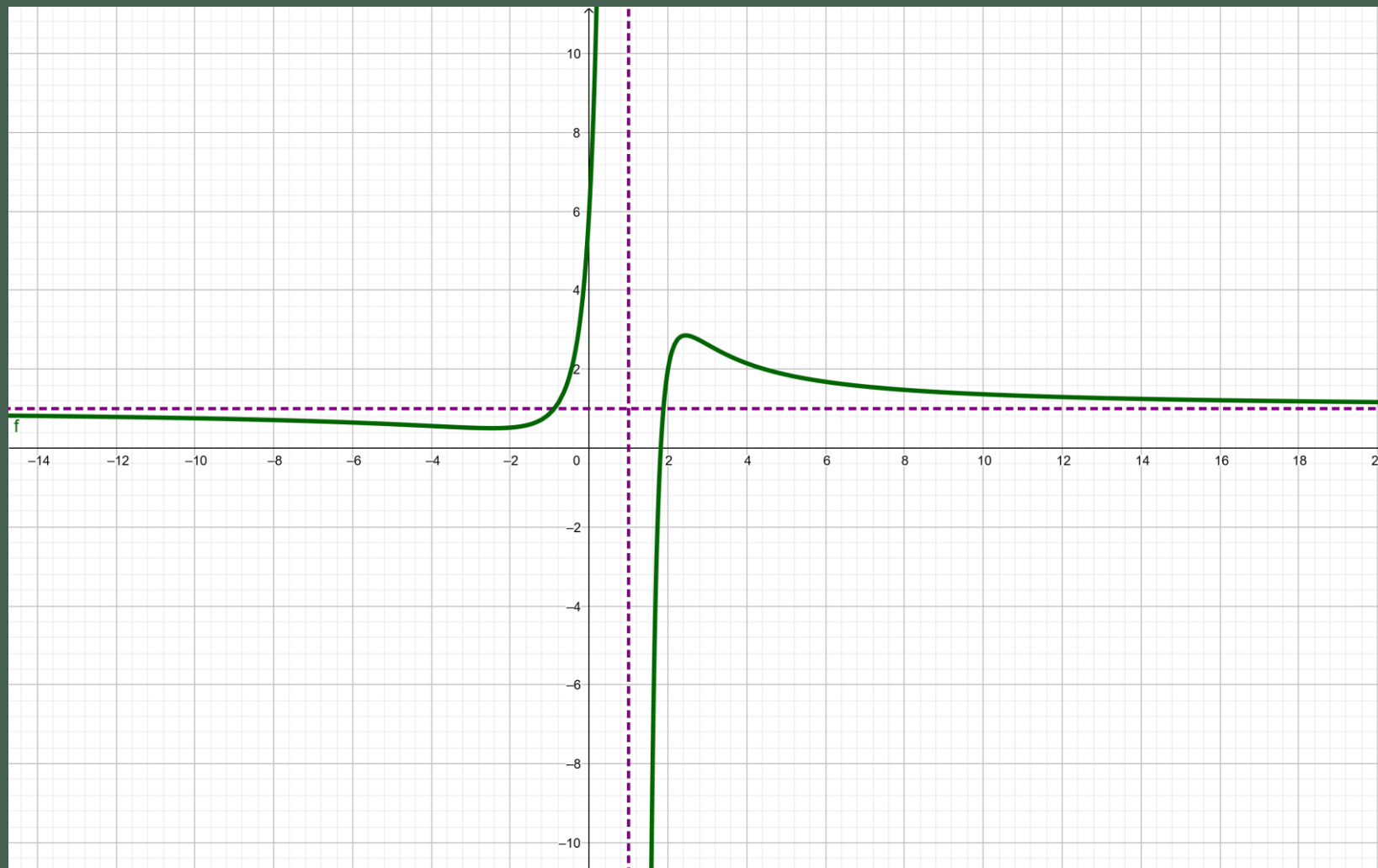


### 3. задатак – углови у нулама или превојним тачкама

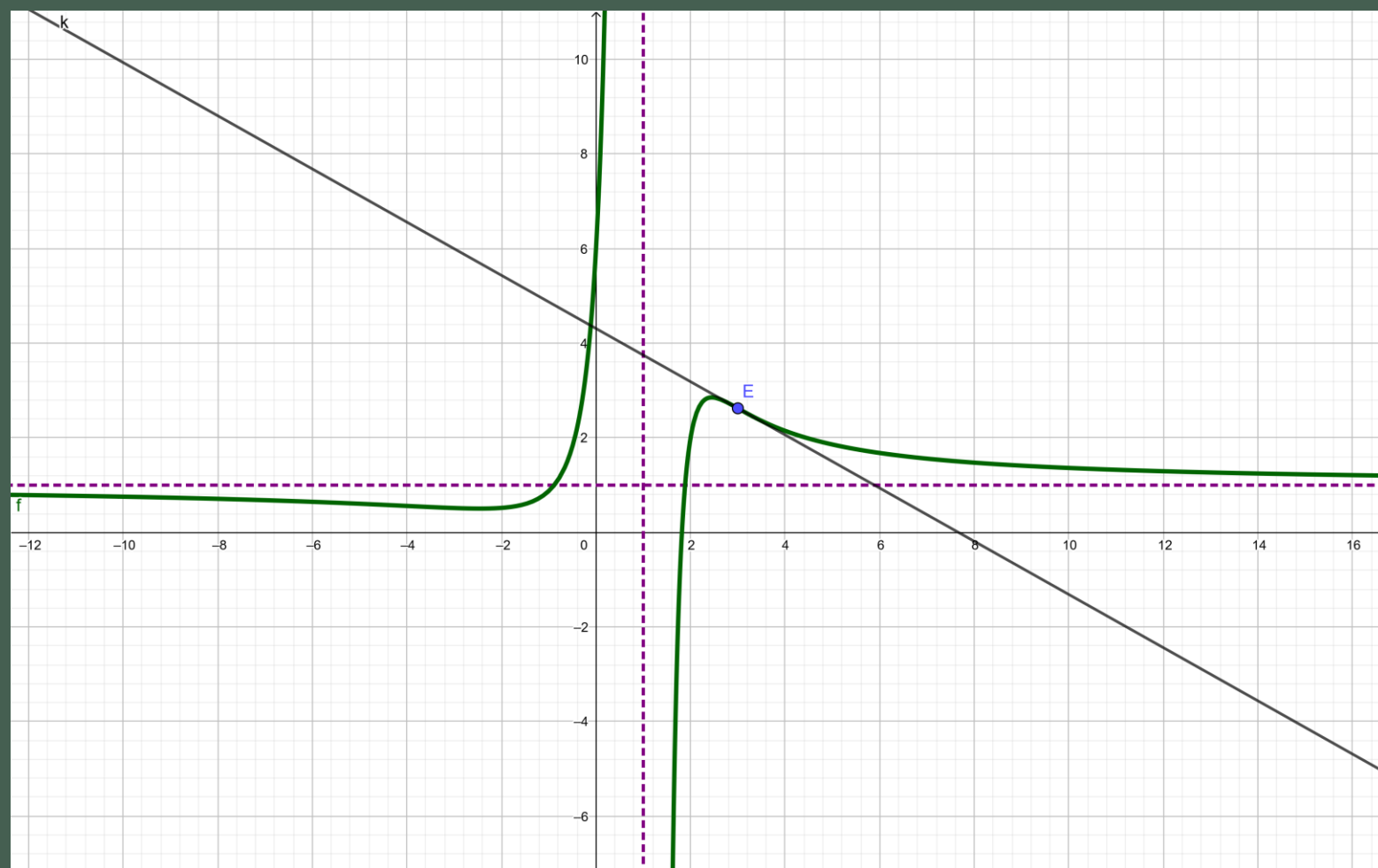


# 4. ЗАДАЧА

$$\bullet y = \frac{x^3 - 6}{(x-1)^3}$$

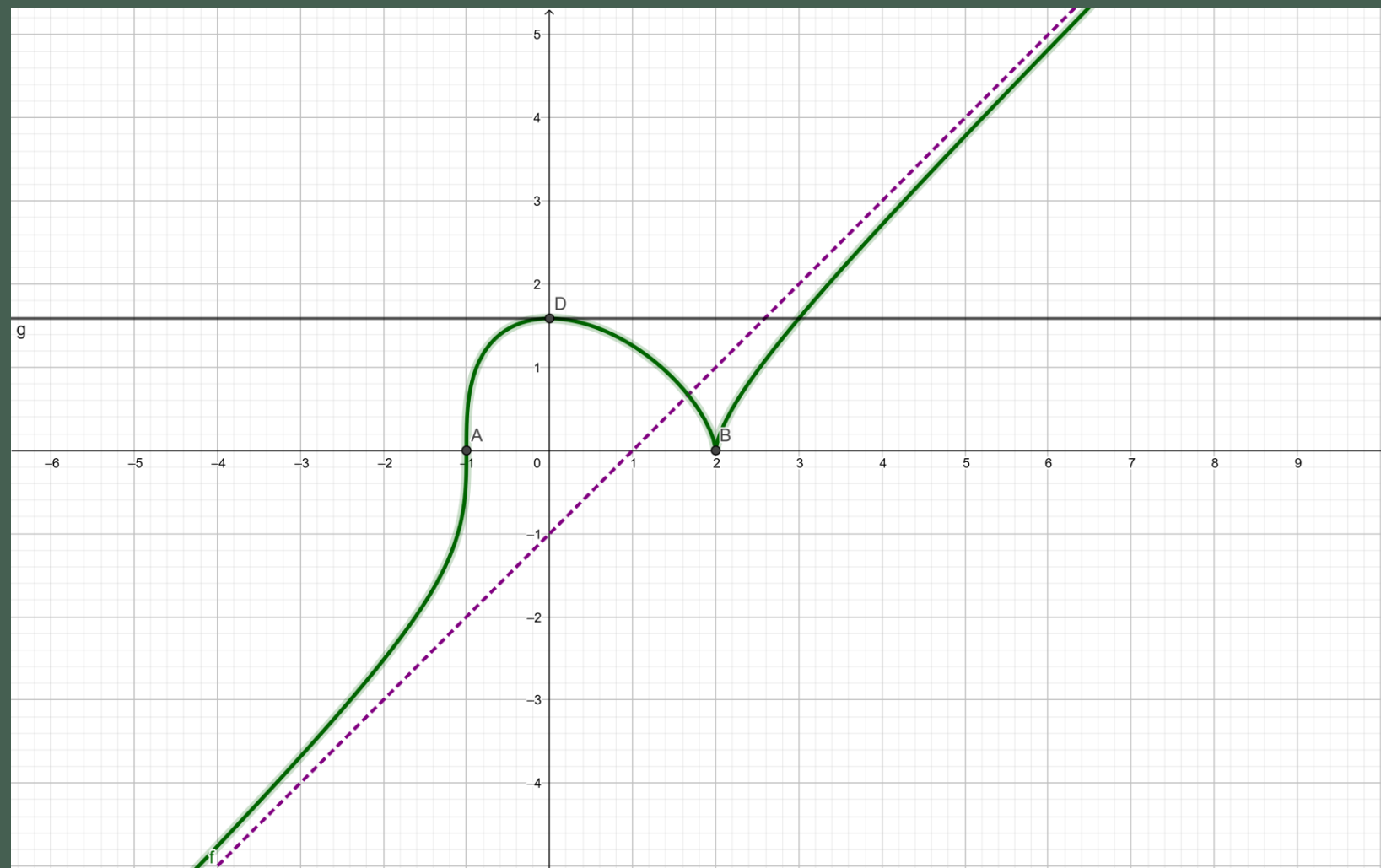


## 4. задатак – тангенте у превојним тачкама

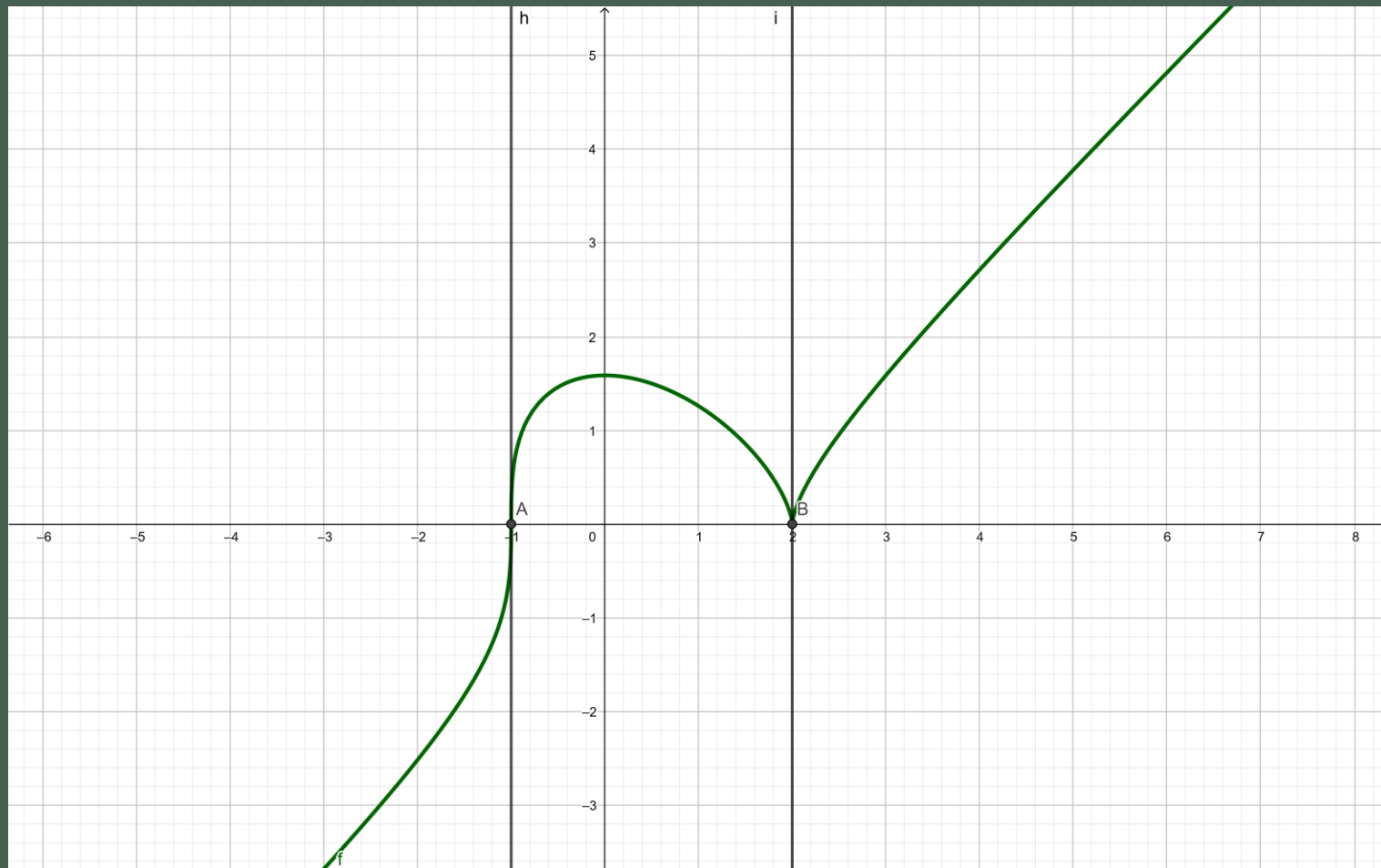


# 5. ЗАДАЧА

$$y = \sqrt[3]{(x-2)^2(x+1)}$$

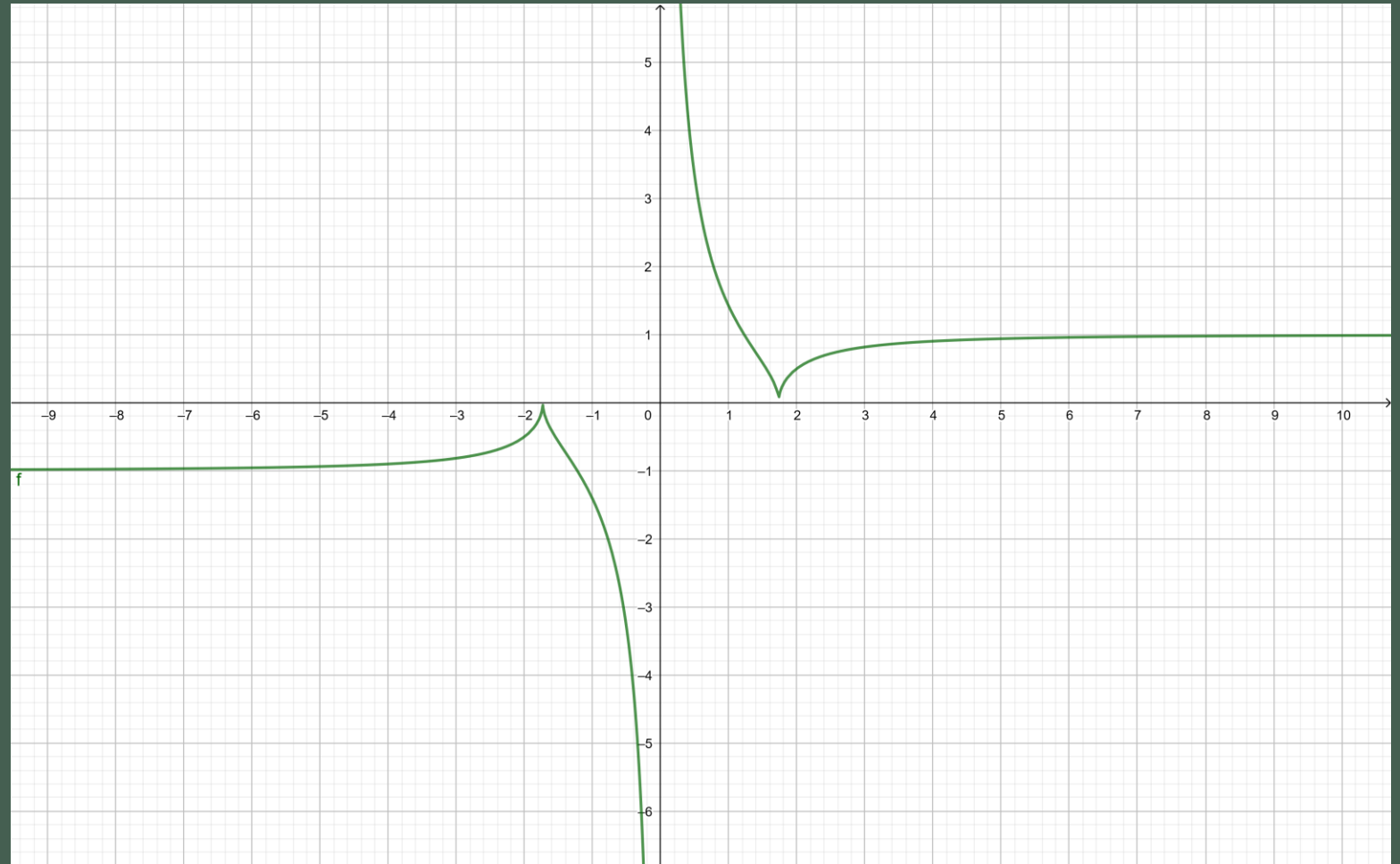


## 5. задатак – тангенте у нулама и превојним тачкама

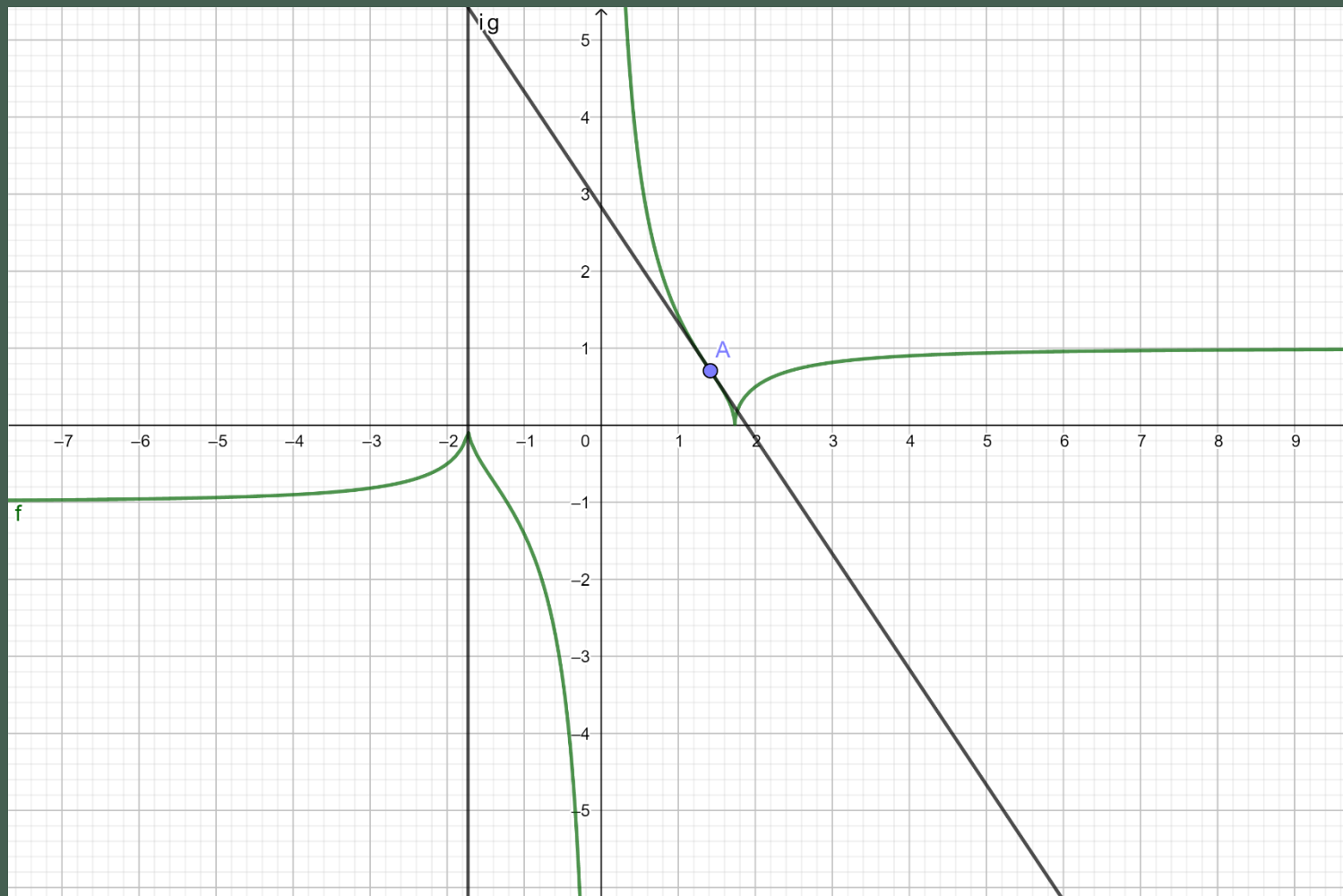


# 6. ЗАДАТАК

$$\bullet y = \frac{\sqrt{|x^2 - 3|}}{x}$$



## 6. задатак – тангенте у екстремним и превојним тачкама



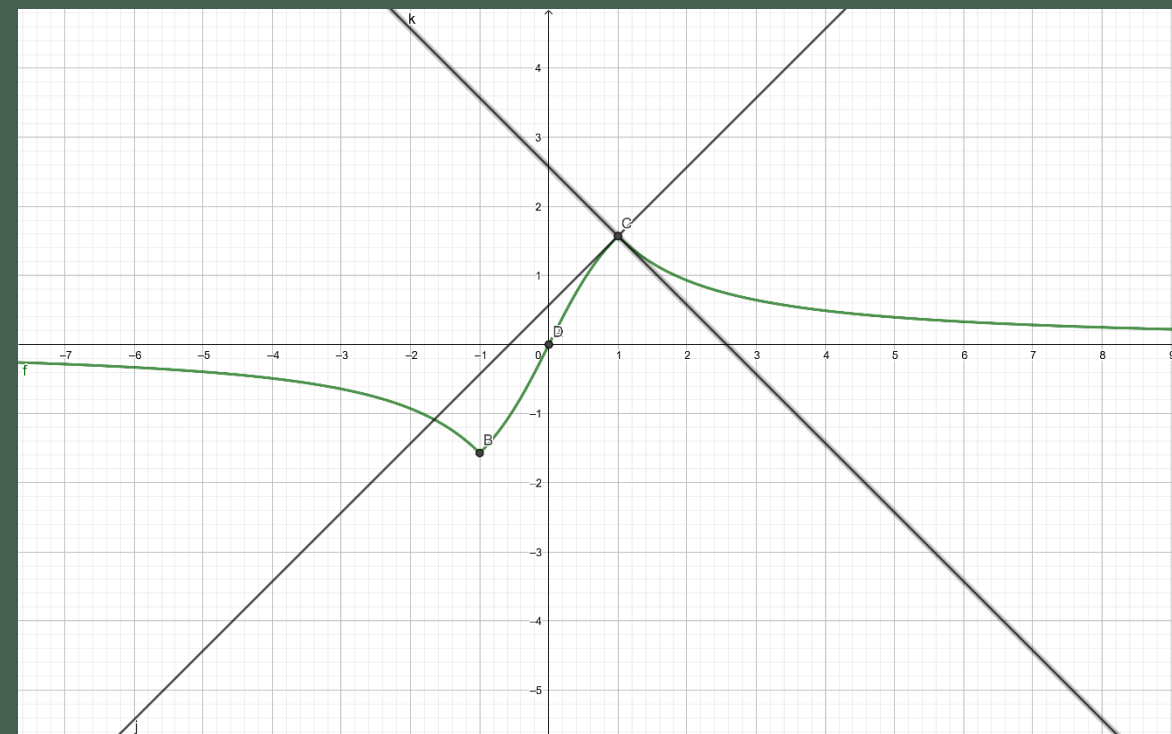
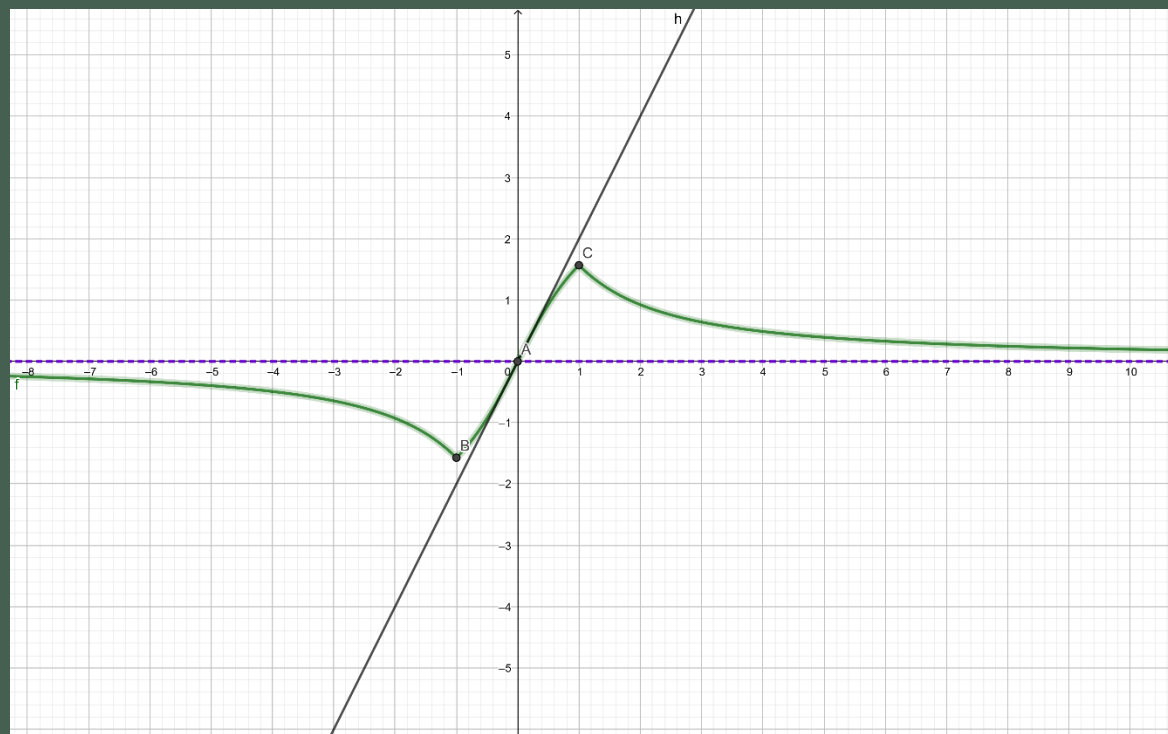
# 7. ЗАДАТАК

$$\therefore y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$





# 7. задатак – нула и екстремне вредности функције

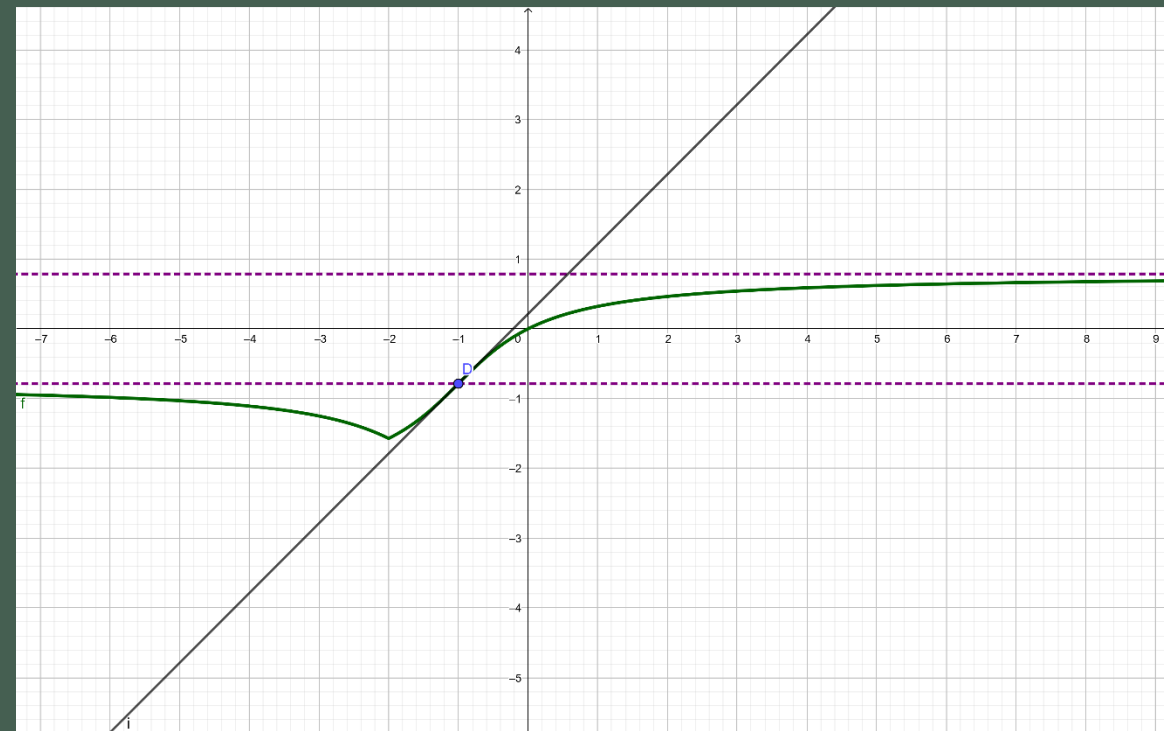
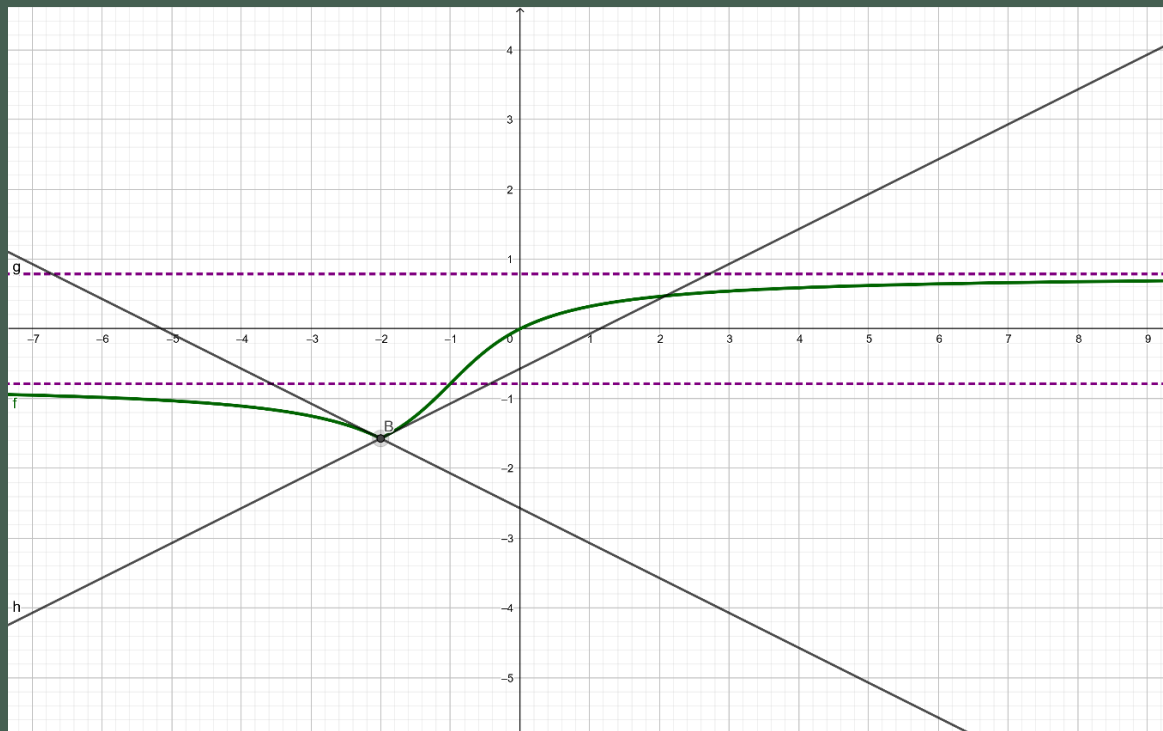


# 8. ЗАДАЧА

$$y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 4x + 4}}$$

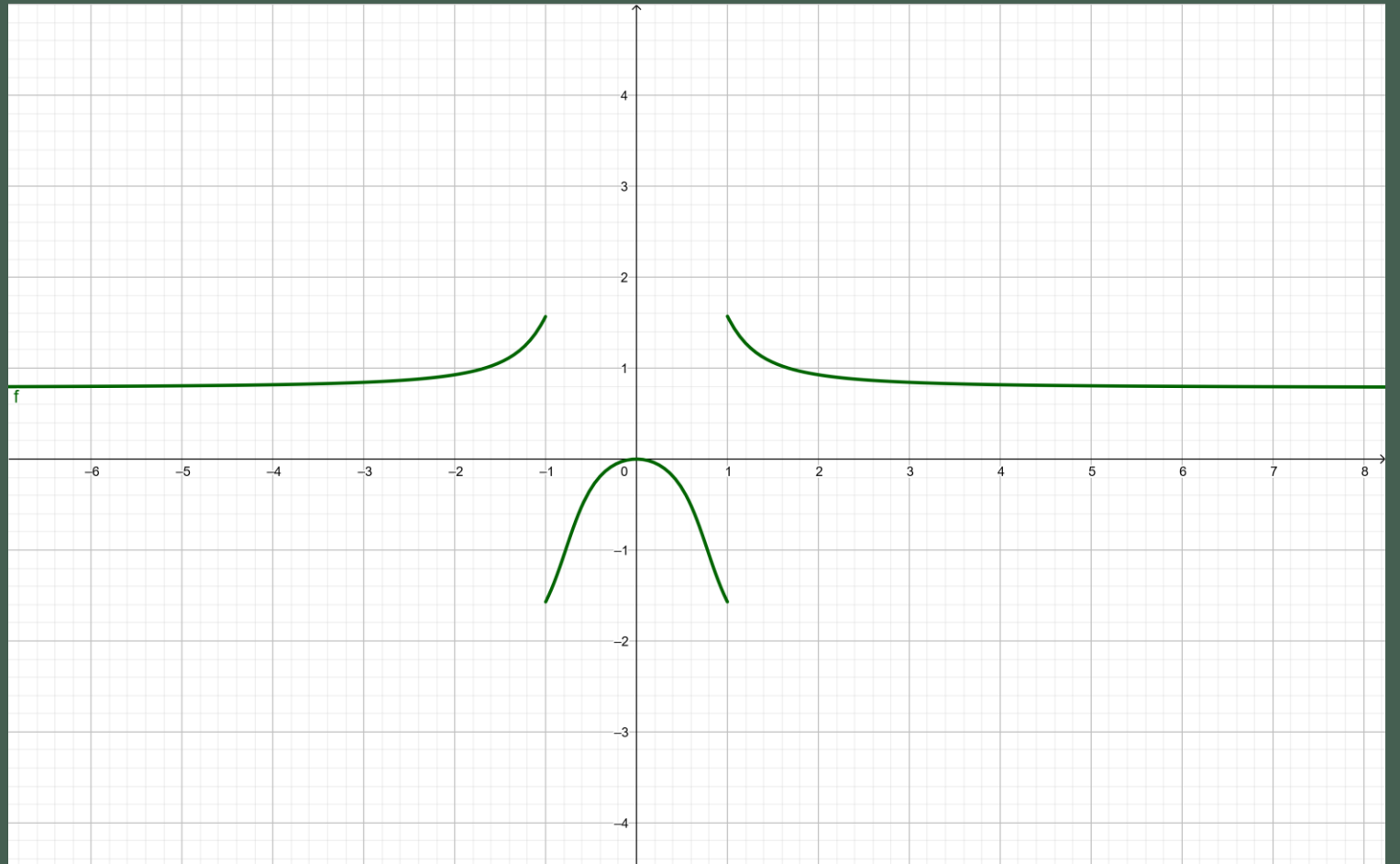


# 8. задатак – екстремне и превојне тачке

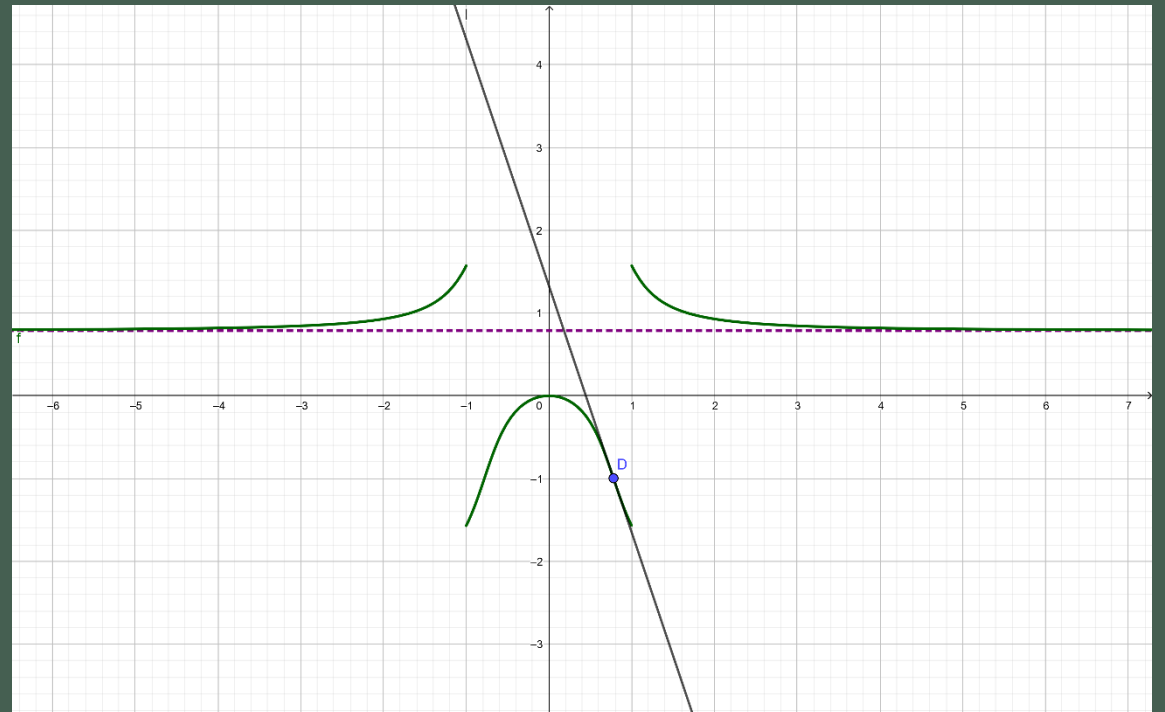
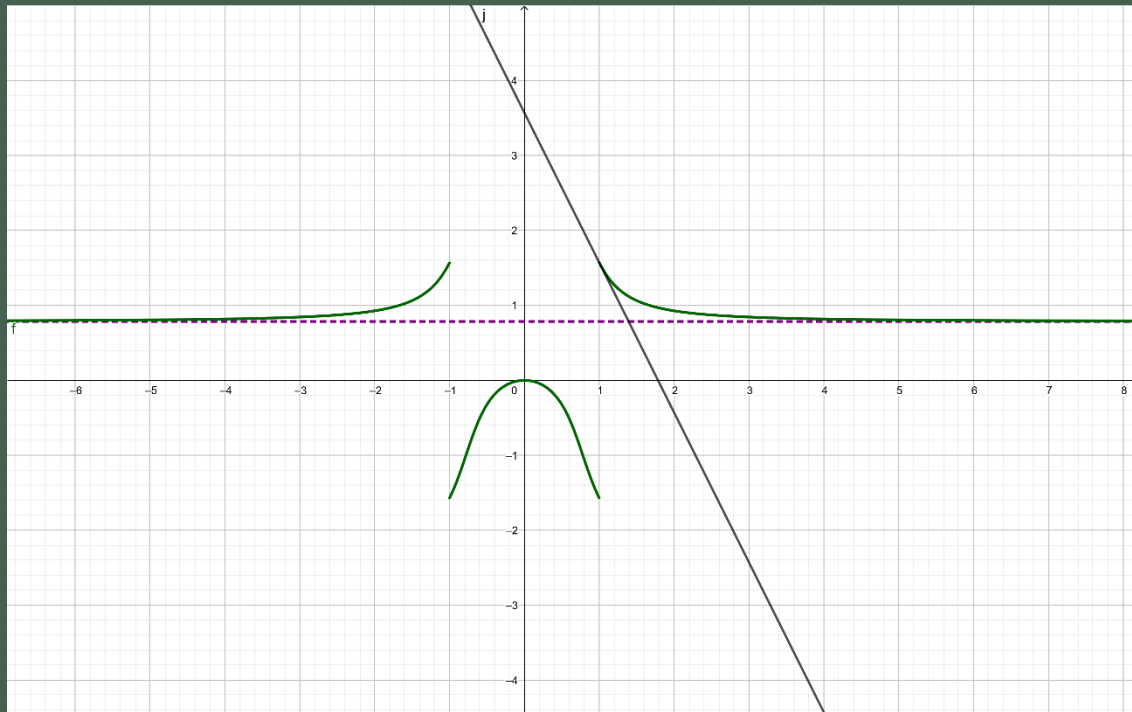


# 9. ЗАДАЧА

$$\bullet y = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

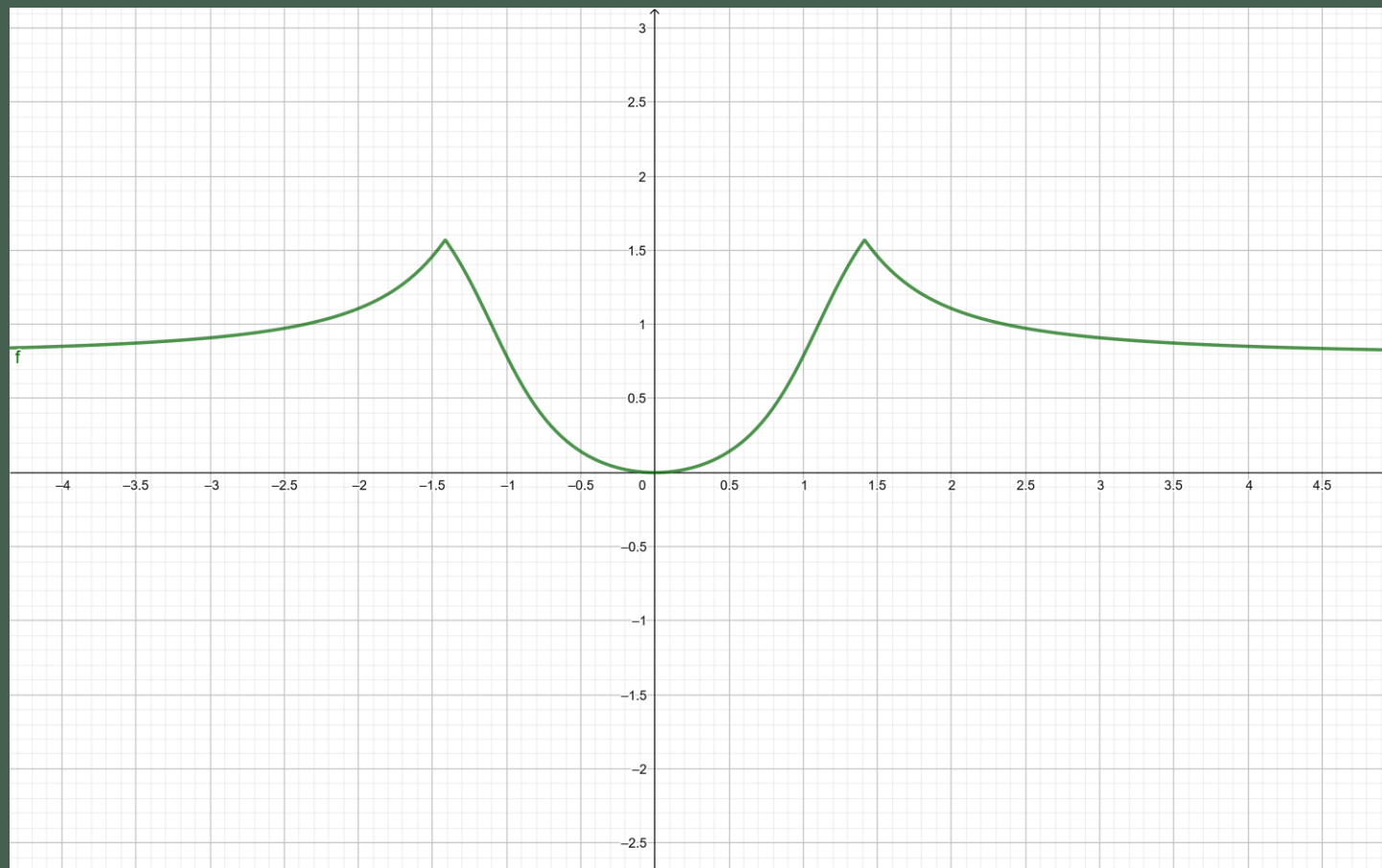


# 9. задатак – граничне и превојне тачке

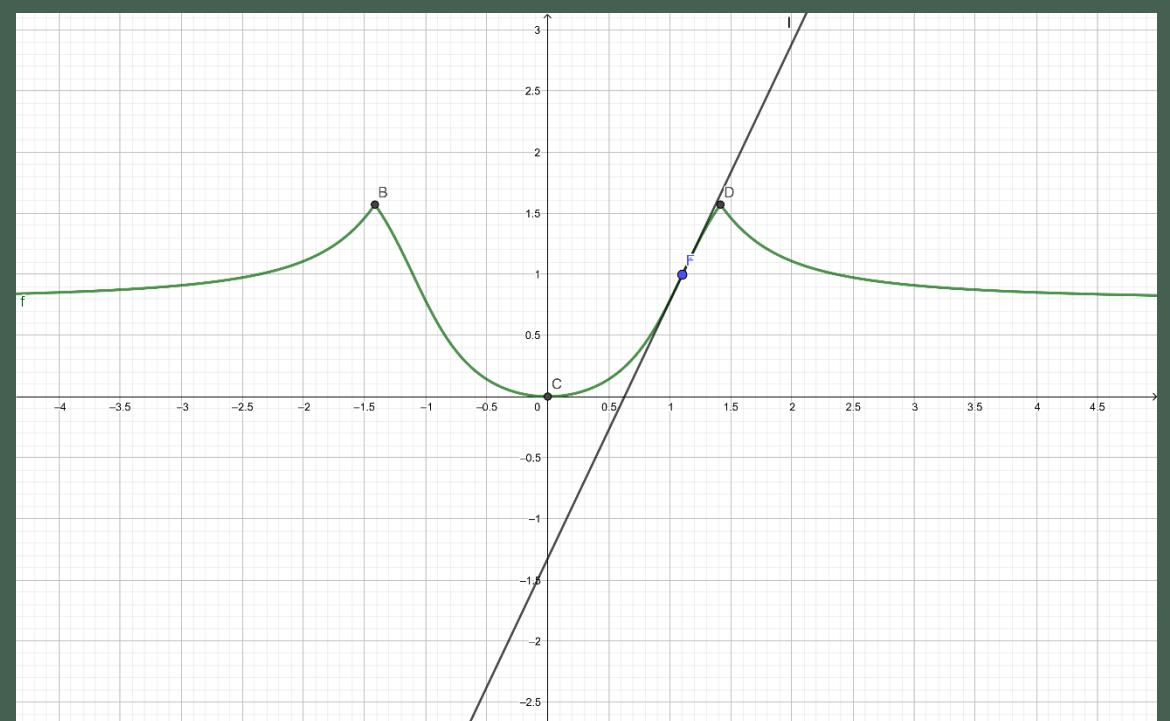
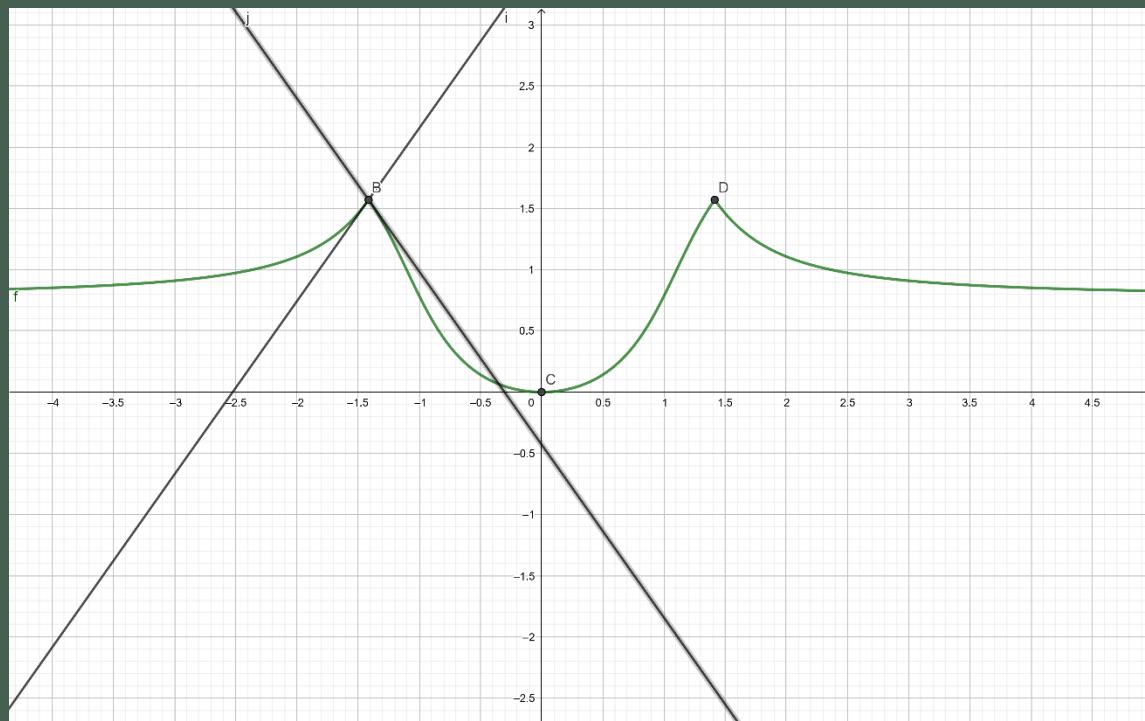


# 10. ЗАДАТАК

$$\bullet y = \arcsin \frac{x^2 \sqrt{2}}{2\sqrt{x^4 - 2x^2 + 2}}$$

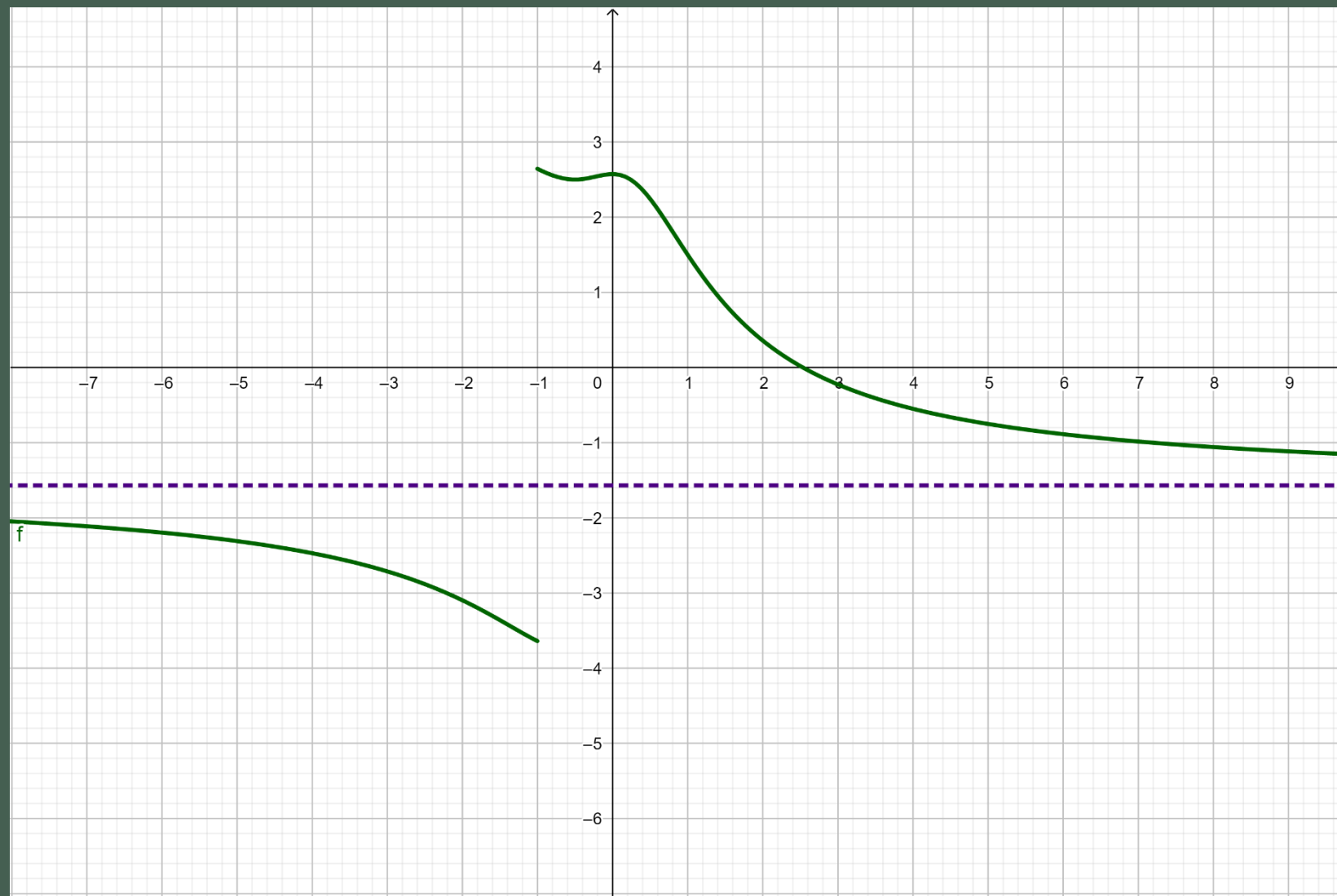


# 10. задатак – граничне и превојне тачке



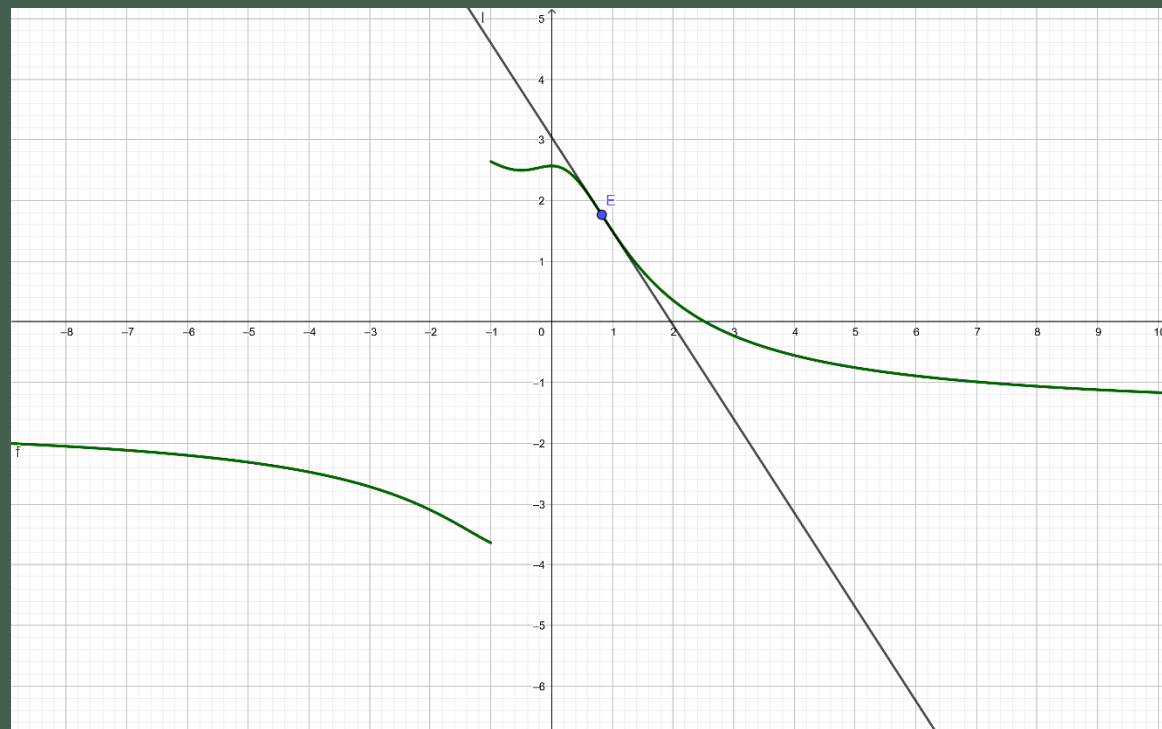
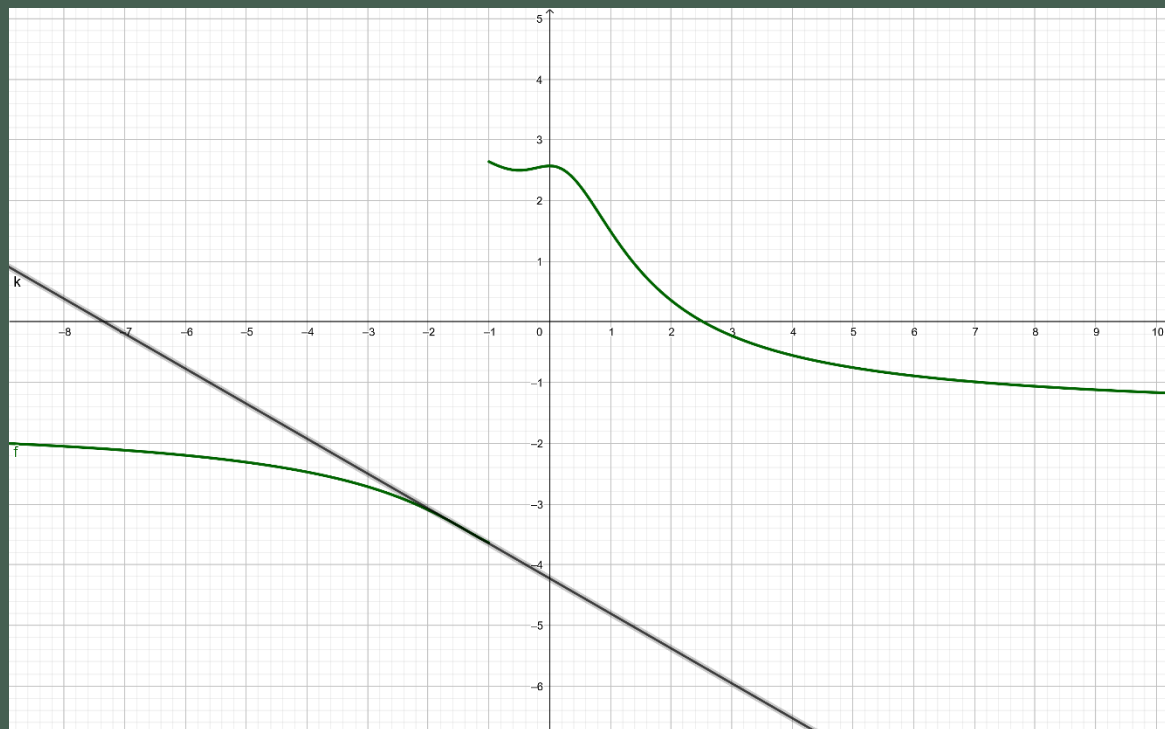
# 11. ЗАДАЧА

- $y = e^{\frac{1}{x^2-1}}$



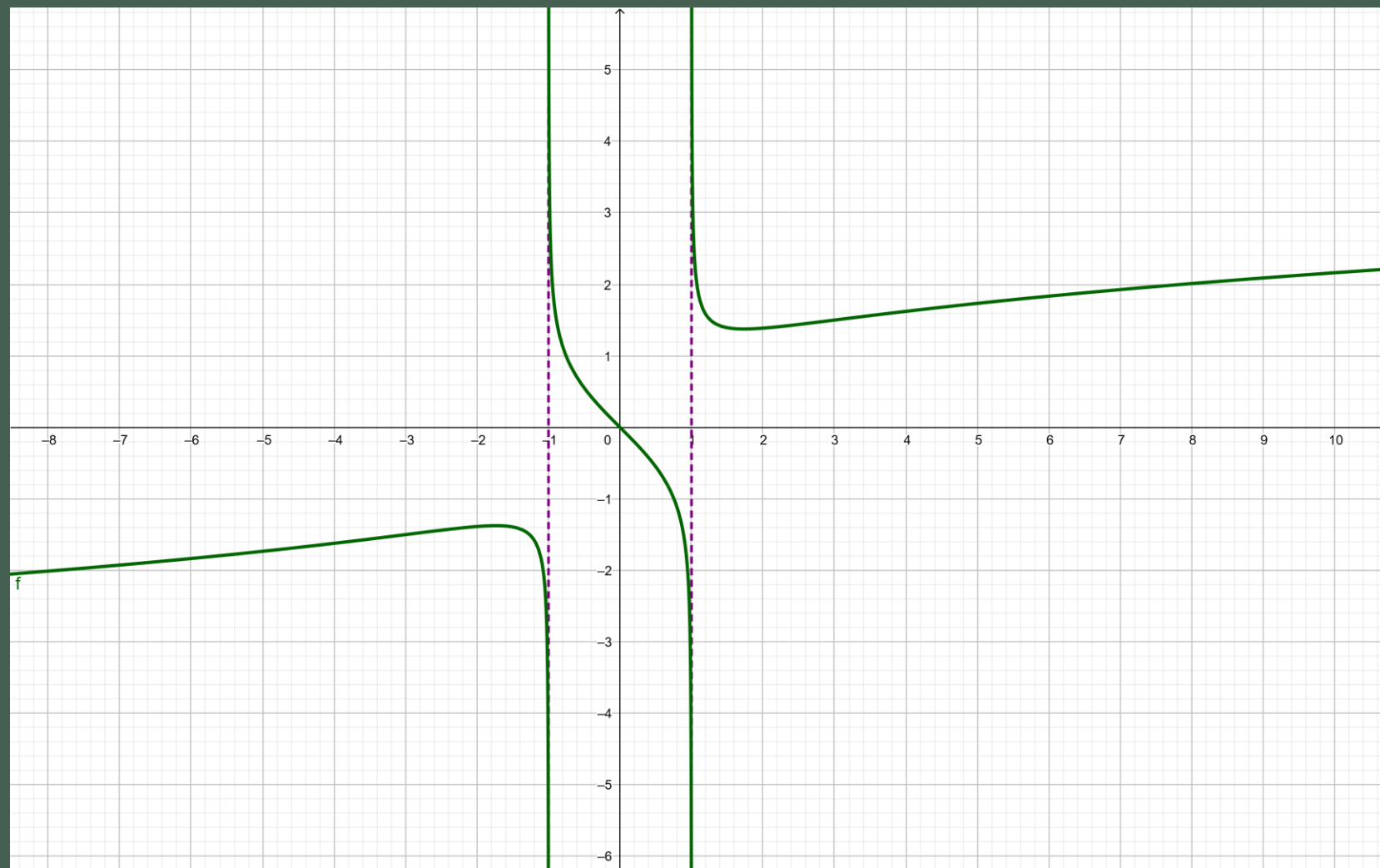


# 11. задатак – граничне и превојне тачке

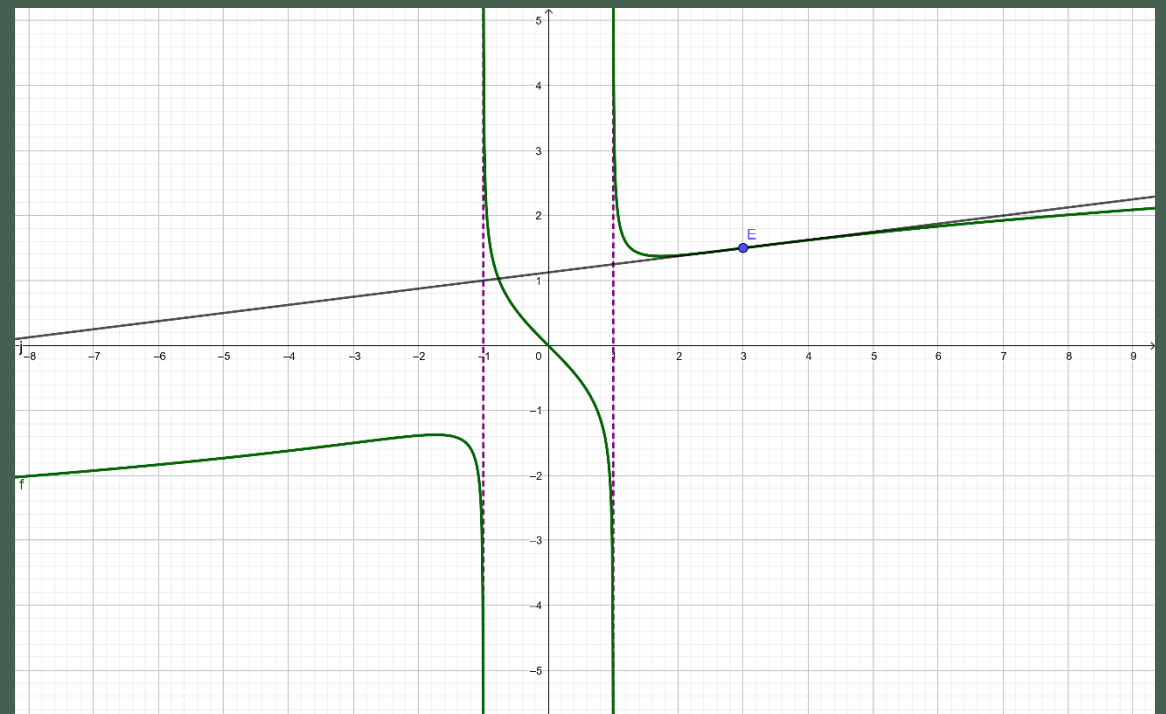
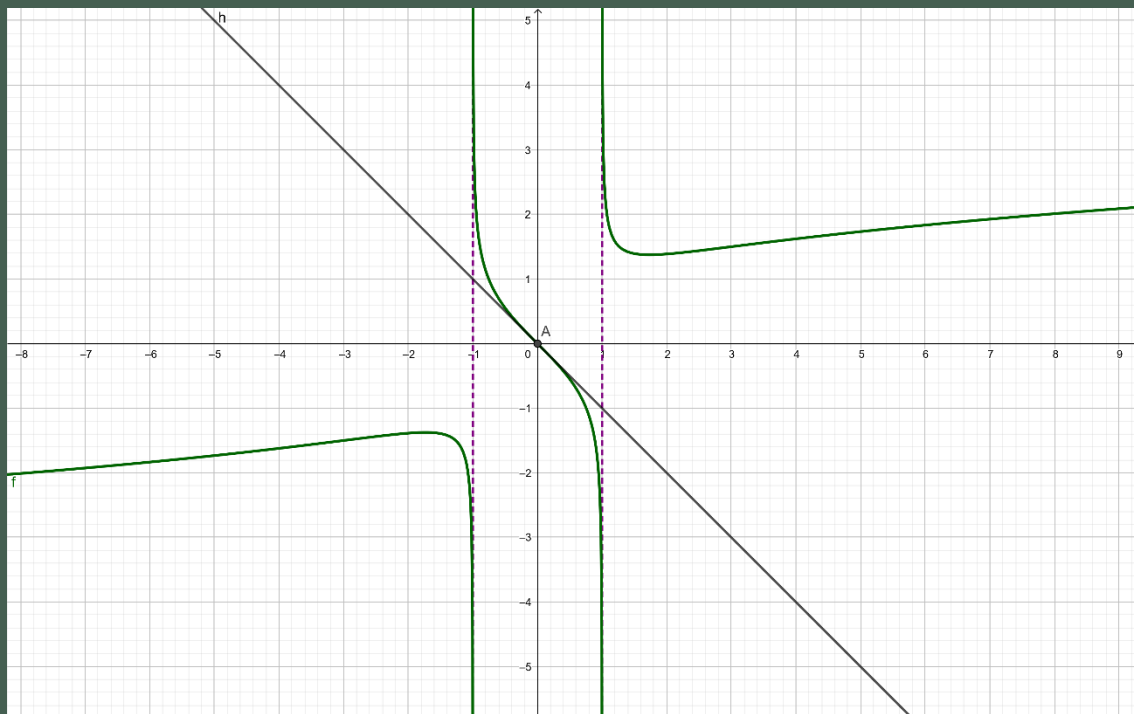


# 12. ЗАДАЧА

$$\bullet y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

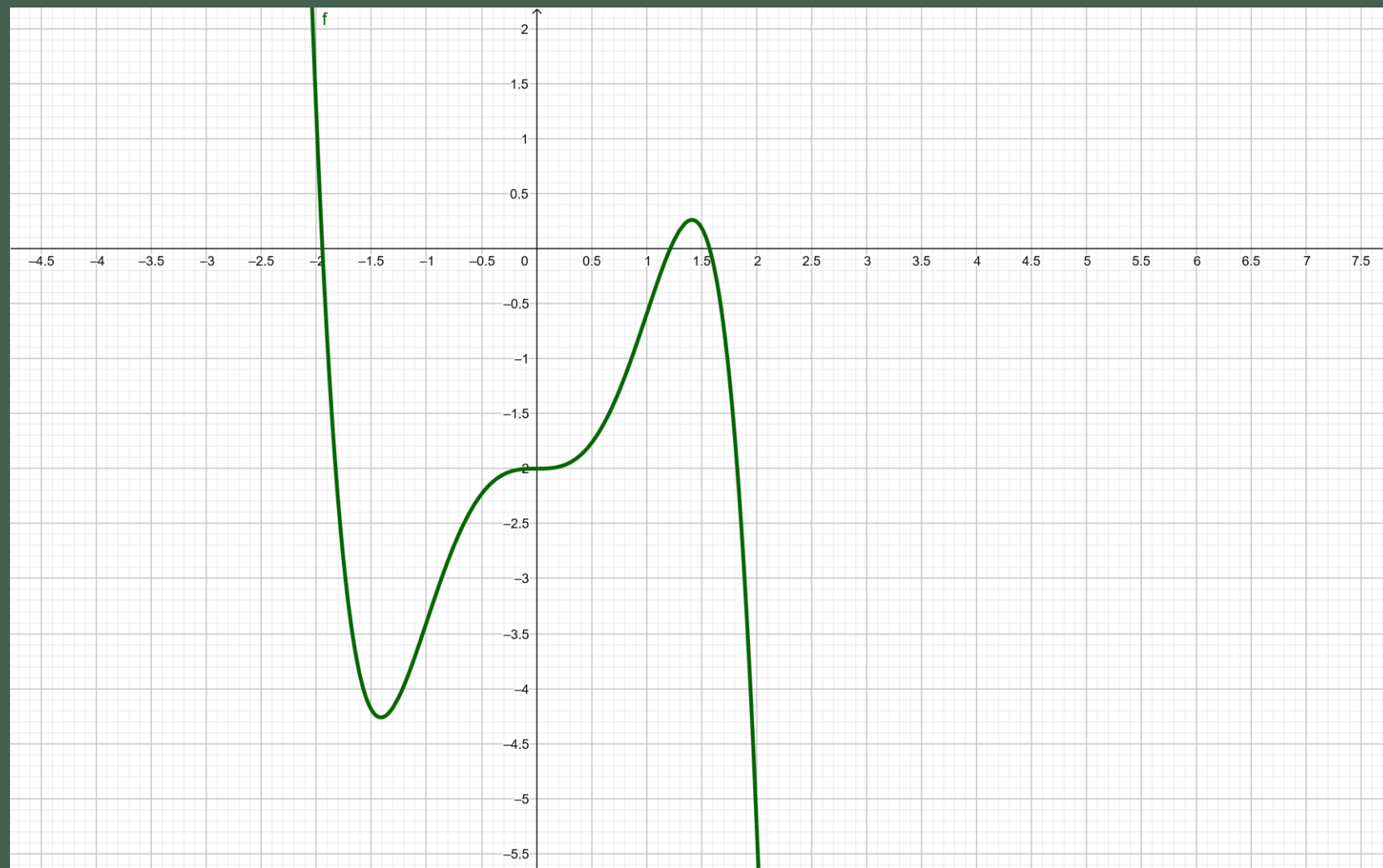


# 12. задатак – нула и екстремне вредности функције

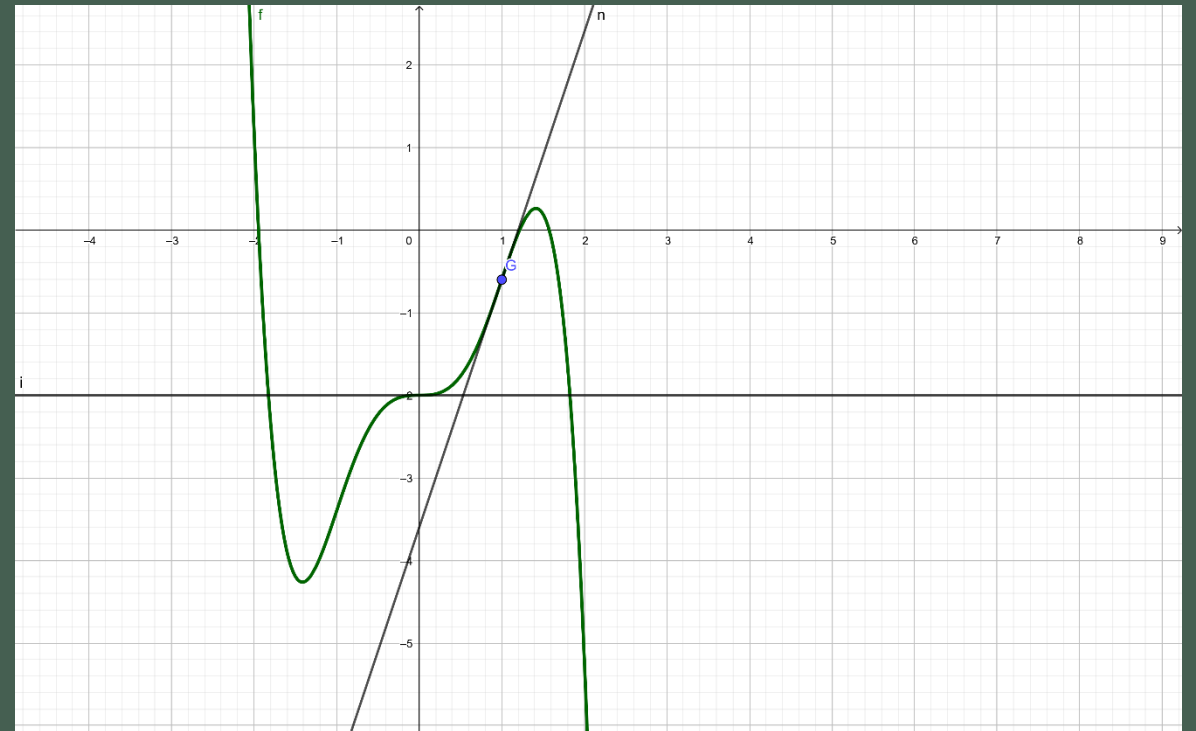
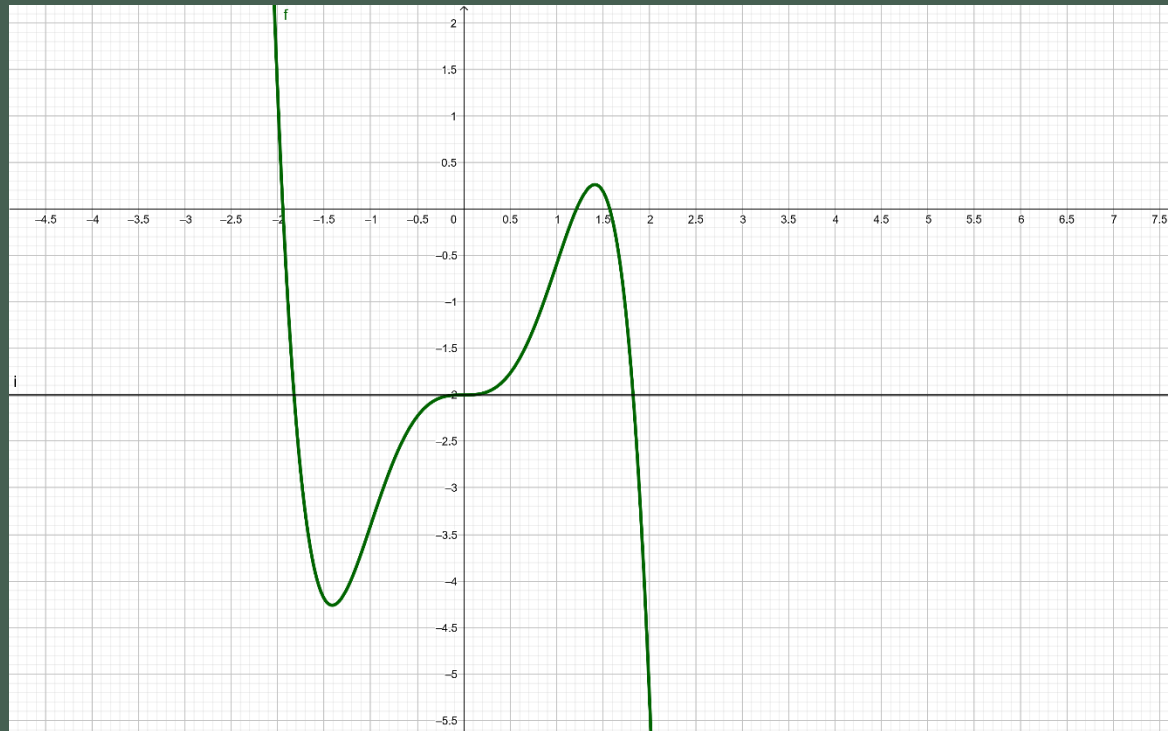


# 13. ЗАДАТАК

$$\bullet y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

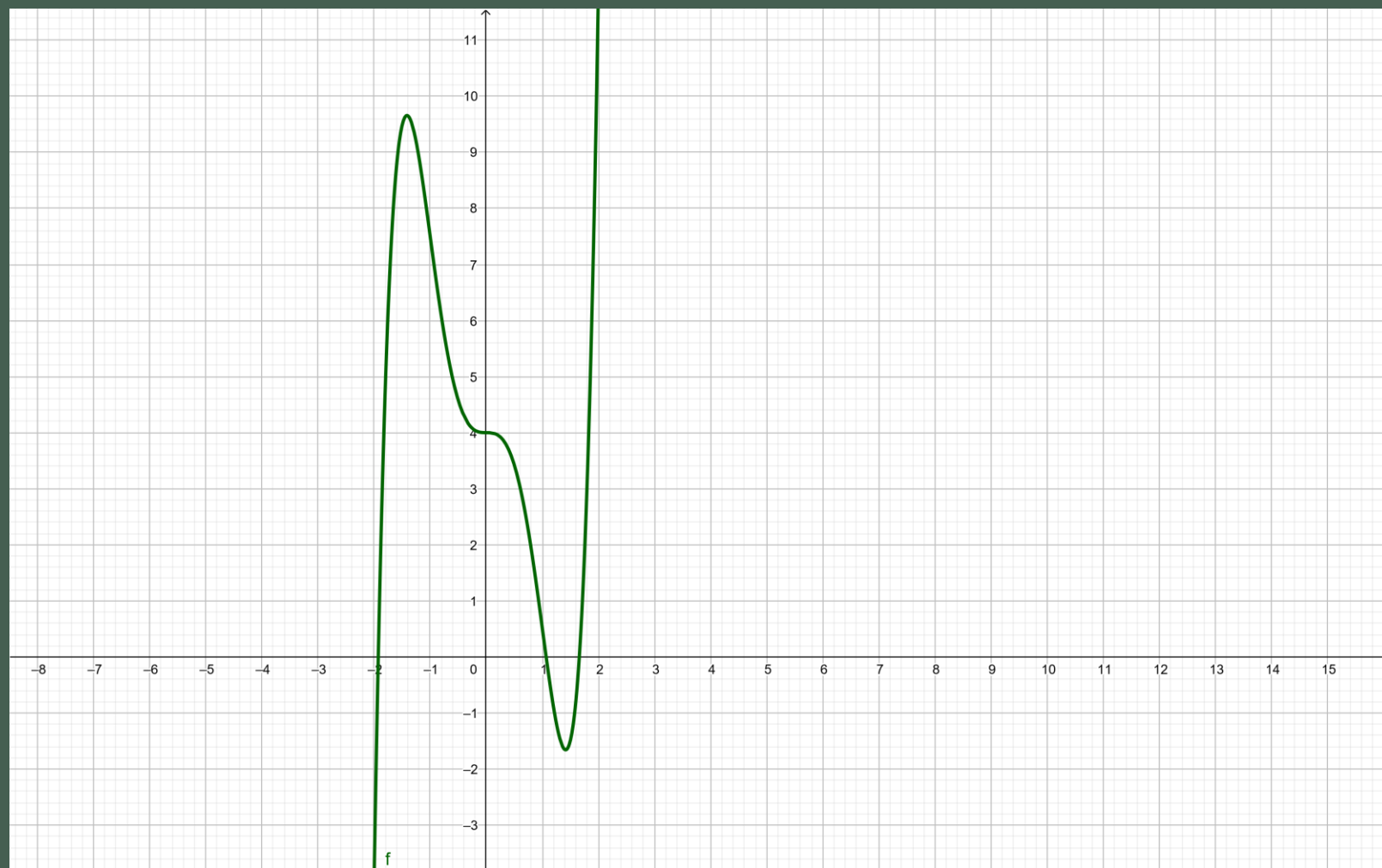


# 13. задатак – тангенте у превојним тачкама

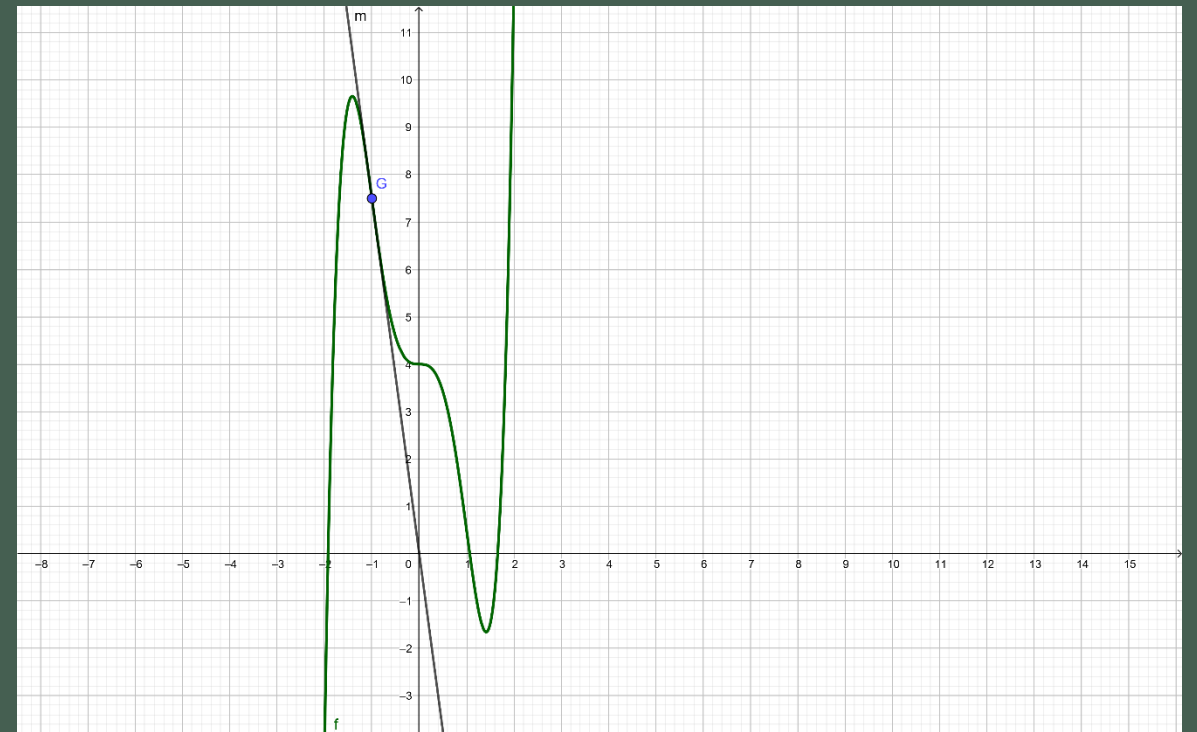
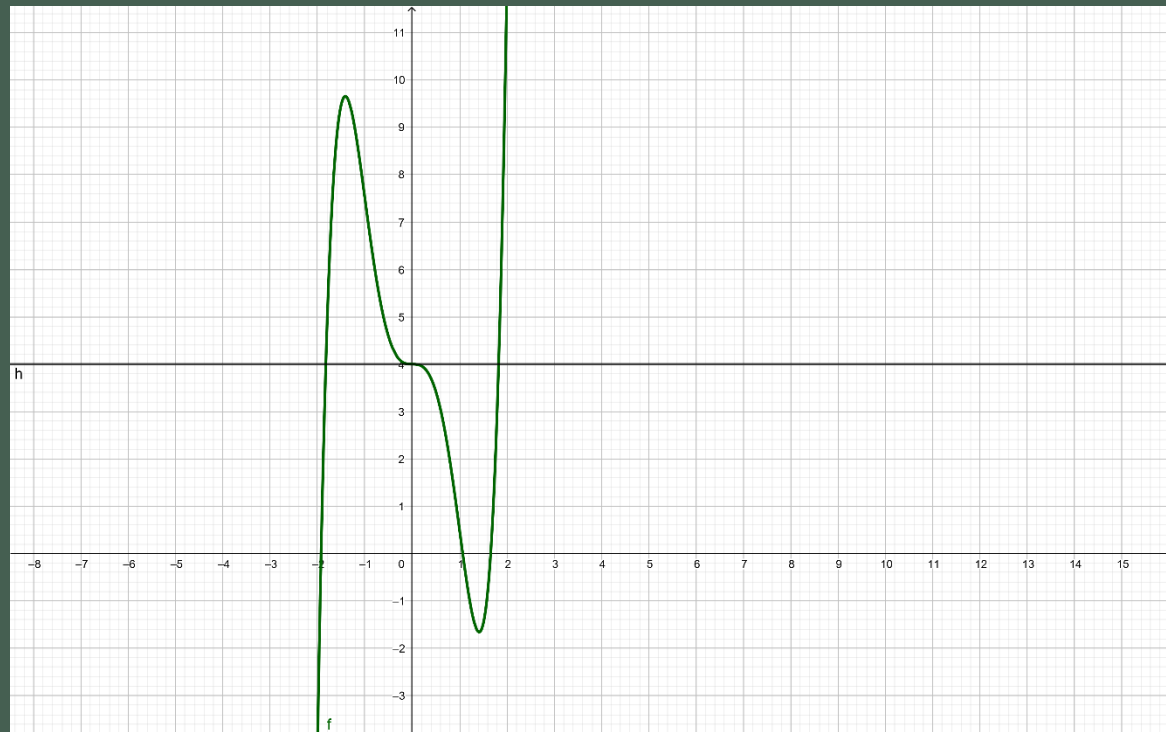


# 14. ЗАДАЧА

$$\bullet y = \frac{3}{2}x^5 - 5x^3 + 4$$



# 14. задатак – превојне тачке



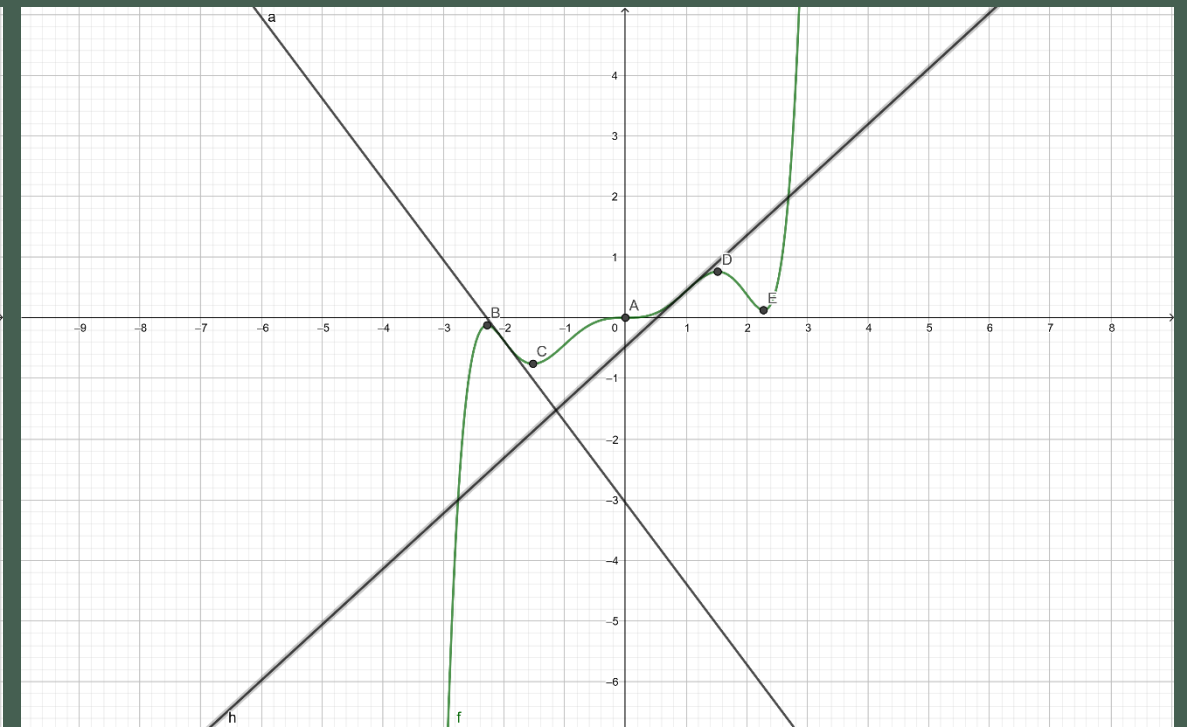
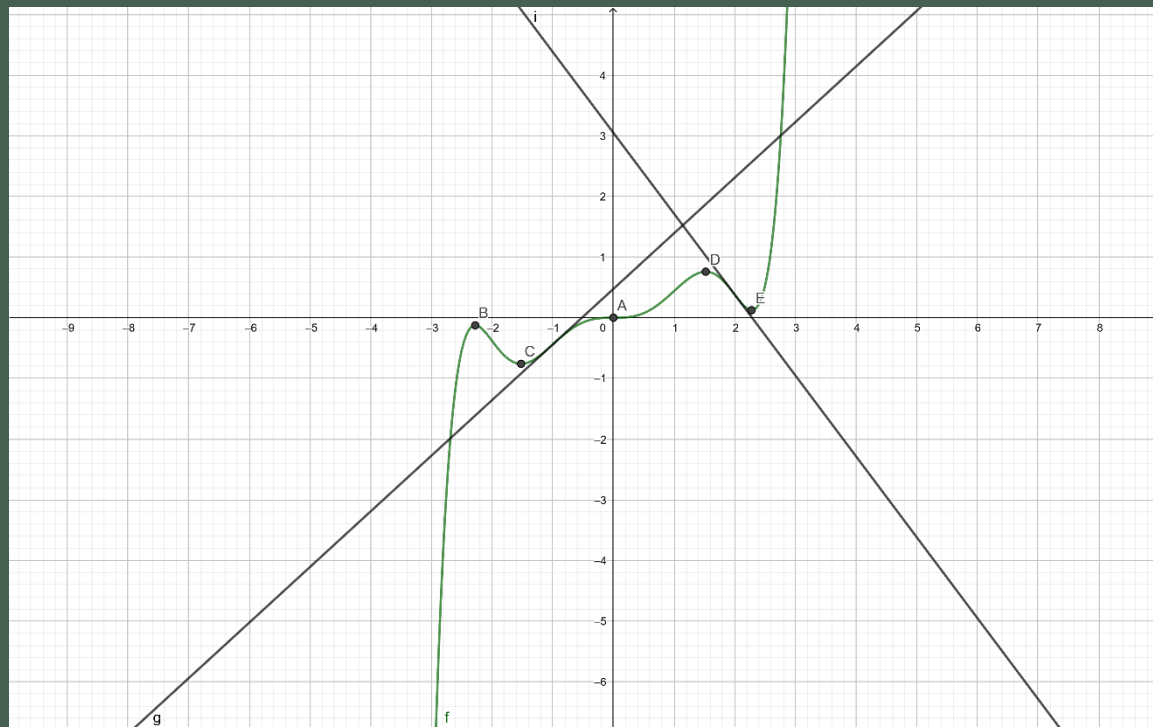
# 15. ЗАДАЧА

$$\bullet y = \frac{x^7}{42} - \frac{x^5}{4} + \frac{2x^3}{3}$$





# 15. задатак - превојне тачке



# Завршни задатак:

- Детаљно испитати и скицирати график

$$\text{функције } y = \frac{x^7}{42} - \frac{x^5}{4} + \frac{2x^3}{3}$$

- Напомена: При скицирању графика функције користити Геогебру.