Вежба 3 Операције са матрицама

4.1. ТРАНСПОНОВАЊЕ МАТРИЦА

Транспоновање матрица са реалним коефицијентима, је замена врста и колона. Врши се помоћу оператора ' .

ПРИМЕР 1: Транспоновати дату матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$.

```
>> A, E=A'

A =
    1    2    3
    2   -3    1
   -4   -5   -6

E =
    1    2   -4
    2   -3   -5
    3    1   -6
```

ПРИМЕР 2: Транспоновати скалар a=[5.2] и векторе x=[-1 3 8],

```
>> a=[5.2]'

a =
   5.2000

>> x=[-1 3 8]'

x =
   -1
    3
    8
```

ПРИМЕР 3: Транспоновања матрица чији су елементи комплексни бројеви, врши се тако што се транспонује матрица и истовремено коњугује сваки њен елемент.

```
>> Z=[1+2*i , 2-6*i ; 3+7*i , 4+8*i] , W=Z'
```

```
Z =
   1.0000 + 2.0000i   2.0000 - 6.0000i
   3.0000 + 7.0000i   4.0000 + 8.0000i

W =
   1.0000 - 2.0000i   3.0000 - 7.0000i
   2.0000 + 6.0000i   4.0000 - 8.0000i
```

4.2. ДЕТЕРМИНАНТА МАТРИЦЕ

Детерминанта квадратне матрице је број који се у MATLAB-у израчунава помоћу наредбе ***det()***.

ПРИМЕР 4: Израчунати детерминанту квадратне матрице А.

```
>> A ; D=det(A)

D=
  -27
```

ПРИМЕР 5: На исти начин се одређује детерминанта комплексне матрице. Нађимо детерминанту матрице Z из примера 3.

```
>> Z , D1=det(Z)

Z =
   1.0000 + 2.0000i   2.0000 - 6.0000i
   3.0000 + 7.0000i   4.0000 + 8.0000i

D1 =
 -60.0000 +20.0000i
```

Наредбом ***diag(A)*** добијамо дијагоналну матрицу дате матрице А.

ПРИМЕР 6: Издвојити елементе главне дијагонале матрице А

а) Резултат написати као низ бројева и назвати је X1

```
>> A;X1=diag(A),

X1 =
     1
    -3
    -6
```

б) Елементе записати у форми матрице, назвати је X2.

```
>>X2=diag(diag(A))     % ovakvom naredbom se elementi dijagonale prikazuju u
        formi matrice X2. Matrica X2 ima dimenzije kao i matrica A, istu glavnu
        dijagonalu kao matrica A svi ostali elementi su 0

X2 =
    1    0    0
    0   -3    0
    0    0   -6
```

ОСНОВНЕ ОПЕРАЦИЈЕ СА МАТРИЦАМА СУ: САБИРАЊЕ, ОДУЗИМАЊЕ, МНОЖЕЊЕ, СТЕПЕНОВАЊЕ И ТРАНСПОНОВАЊЕ.

4.3. САБИРАЊЕ И ОДУЗИМАЊЕ МАТРИЦА

Сабирање и одузимање матрица врши се тако што се сабирају, односно одузимају одговарајући елементи матрица. Том приликом морамо водити рачуна да матрице буду истих димензија.
Иста правила важе и код вектора.

ПРИМЕР 7: Сабрати $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & -5 & -5 \end{bmatrix}$ и $B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

```
>> A=[1, 2, 3; 2,-3, 1;-4,-5,-5]
>> B=[2, 3,-4; 1, -1, 1; 3, 2, -1] ; C=A+B

A =
    1    2    3
    2   -3    1
   -4   -5   -6
C =
    3    5   -1
    3   -4    2
   -1   -3   -6
```

Сабирање и одузимање је изводљиво и у случају када је један чинилац **скалар**. Такав израз MATLAB тумачи тако што сваком елементу матрице додаје или од њега одузима назначени скалар.

ПРИМЕР 8: Од дате матрице А одузети скалар 1.

```
>> D=A-1

D =
    0    1    2
    1   -4    0
   -5   -6   -6
```

Напомена: У предходном примеру, скалар 1 MATLAB аутоматски схвата као матрицу истих димензија као што је матрица A чији су сви елементи једнаки 1. Иначе у математици ово одузимање се не може обављати. Могу се одузимати само матрице, па се ова јединица схвата као јединична матрица истог реда као задата матрица A, тј. $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4.4. МНОЖЕЊЕ МАТРИЦА

Множење матрица скаларом се врши тако што сваки елемент те матрице помножимо вредношћу датог скалара. За множење матрица скаларом важи закон комутације, тј. $kA = Ak$.

ПРИМЕР 9: Ако је $k = 5$, одредити матрицу $5A$. Множење матрица се обавља коришћењем оператора * .

```
>> A , F=5*A

A =
    1    2    3
    2   -3    1
   -4   -5   -5
F =
    5   10   15
   10  -15    5
  -20  -25  -25
```

Множење две матрице: Производ матрица A={$\left(a_{i,j}\right)_{m\times r}$} и B={$\left(b_{i,j}\right)_{r\times n}$} је нова матрица $C = \left\{\left(c_{i,j}\right)_{m\times n}\right\}$ чији су елементи $c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{i,k} b_{k,j}$.

ПРИМЕР 10: Помножити матрице A и A1.

```
>> A ;A1=[1, 2 ; 2, -3 ; 1, 6] , P=A*A1

A1 =
    1    2
    2   -3
    1    6
P=
    8   14
   -3   19
  -19  -23
```

ПРИМЕР 11: Помножити матрице A1 и A.

```
>> A1*A

??? Error using ==> *
Inner matrix dimensions must agree.
```

Напомена: Матрично множење није комутативна операција и димензије матрица A и A1 морају да буду усклађене.

ПРИМЕР 12: Унети матрице $F=\begin{bmatrix}1 & 3\\5 & 7\end{bmatrix}, G=\begin{bmatrix}4 & 2\\1 & 6\end{bmatrix}$ и помножити F и G а затим G и F .

```
>>  F=[1 3; 5 7], G=[4 2 ; 1 6]
F=
     1     3
     5     7
G=
     4     2
     1     6

>>  FG=F*G
FG=
      7    20
     27    52

>>  GF=G*F
GF=
     14    26
     31    45
```

4.5. ИНВЕРЗНА МАТРИЦА

Инверзна матрица дате матрице A рачуна се по обрасцу $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}adjA$.

У MATLAB-у инверзна матрица A^{-1}, одређује се коришћењем наредбе ***inv()***.

ПРИМЕР 13: Наћи инверзну матрицу, задате матрице A.

```
>> A ; inv(A)

ans =
   -0.5882    0.1471   -0.3235
   -0.1765   -0.2059   -0.1471
    0.6471    0.0882    0.2059
```

ПРИМЕР 14: Наћи инверзну матрицу, матрице $S=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$.

```
>> S=[1 2 3 ; 4 5 6 ; 7 8 9]
>> inv(S)

Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.
        Results may be inaccurate.
```

Напомена: Како је матрица S сингуларна (детерминанта матрице је једнака нули), инверзна матрица не постоји.

4.6. СТЕПЕНОВАЊЕ МАТРИЦА

Ако је A квадратна матрица, а $p \in N$, матрични **степен** дефинишемо као: $A^p = \underbrace{AAAA \cdots AAAA}_{p}$.

За регуларну матрицу (детерминанта различита од нуле) А, важи $A^{-p} = \left(A^{-1}\right)^p$.
Степеновање матрица врши се помоћу оператора ^ .

ПРИМЕР 15: За дату матрицу A одредити A^2, A^{-2} и проверити да ли важи да је $A^2 \cdot A^{-2} = I$, где је I јединична матрица.

```
>> J=A^2 , M=A^(-2) , I=J*M

J =
   -7  -19  -10
   -8    8   -2
    6   32    8
 M =
   0.1107   -0.1453    0.1021
   0.0450    0.0035    0.0571
  -0.2630    0.0952   -0.1799
I =
   1.0000    0.0000     0.0000
  -0.0000    1.0000   -0.0000
  -0.0000    0.0000    1.0000
```

4.7. ДЕЉЕЊЕ МАТРИЦА

У матричном рачуну операција дељења није дефинисана, али у MATLAB - у постоје две наредбе за дељења:

\ означава **“дељење” са лева,** / означава **“дељење” са десна.**

Нека је A квадратна регуларна матрица, тада је

$$A \backslash B = A^{-1} * B, \quad A / B = B * A^{-1}.$$

Резултати се добијају директно, без рачунања инверзне матрице.

ПРИМЕР 16: Решити матричну једначину $AX = B$ где су дате матрице.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Да бисмо решили матричну једначину $AX = B$, како за множење матрица не важи закон комутације, поступак је следећи:

$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B$

$IX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$. У MATLAB–у последња једначина се може написати помоћу симбола дељења X=A\B.

Задати проблем може решити на два начина.

```
>> A=[1, 2 ; 2 ,2 ]; B=[1, 2; 3, 4];

>> X=A\B
X =
   2.0000   2.0000
  -0.5000        0

>> X1=inv(A)*B
X1 =
   2.0000   2.0000
  -0.5000        0
```

ПРИМЕР 17: Решити матричну једначину $XA = B$ користећи матрице A и B из претходног примера.

Једначину $XA = B$, односно њено решење $X = BA^{-1}$ можемо решити матричним дељењем с' десна X=A/B.

```
>> A;B;

>> X=B*inv(A)
X =
    1    0
    1    1

>> X1=A/B
X1 =
    1    0
   -1    1
```

4.8. ОПЕРАЦИЈЕ НАД ПОЉЕМ БРОЈЕВА

За множење, степеновање и дељење у пољу бројева не важе правила матричног рачуна, већ се множење врши по принципу члан по члан. У запису ове операције садрже децималну тачку испред оператора **.* ,** ./, .^.

ПРИМЕР 18: Уочити разлику између множења ***** и **.***

```
>> A=[1 2; 2 3]; B=[1 0; 2 3];
>> A*B
ans =
   5    6
   8    9

>> A.*B
ans =
   1    0
   4    9
```

ПРИМЕР 19: Генерисати вектор x са 4 елемента у опсегу [2,8] а затим израчунати елементе вектора $y = x^2 - 4x$.

```
>> x=linspace(2,8,4)
x=
    2    4         6         8

>> y=x.^2-4*x
y=
   -4    0         12        32
```

Напомена: Сваки елемент вектора *y* је вредност функције *y* која је добијена када је одговарајућа вредност вектора *x* замењена у једначини.